



Université de Liège
Faculté des Sciences Appliquées
&
Centre National d'Etudes Spatiales



Travail de Fin d'Etudes
Comportement dynamique non-linéaire de la Source Laser de l'horloge atomique PHARAO

Travail de fin d'études réalisé en vue de l'obtention du grade de
Master Ingénieur Civil en Aérospatiale
par Claes Cédric

Année académique 2011-2012

Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein du service de *Structure et Mécanique* du *Centre National d'Etudes Spatiales* à Toulouse.

Je tiens, tout d'abord, à exprimer ma gratitude au Professeur Gaëtan Kerschen, ainsi qu'à Fabrice Buffe pour m'avoir permis de réaliser ce travail et ce stage au *C.N.E.S.*. Je tiens à les remercier pour leur aide, leurs conseils et leur suivis tout au long de ce travail.

Je remercie également Jean-Philippe Noël, doctorant au sein du *L.T.A.S.*, et Aurélien Hot, membre du service de *Structure et Mécanique* du *C.N.E.S.* pour leur aide et le temps passé à répondre à mes nombreuses questions.

Je salue tous les membres du service de *Structure et Mécanique* et, plus particulièrement, Didier Gangloff, chef du service, pour leur accueil chaleureux et pour l'excellente ambiance de travail. Ce séjour m'a permis d'acquérir de nombreuses nouvelles compétences, ainsi qu'une solide expérience professionnelle.

Enfin, je suis tout particulièrement envers ma famille et mes proches pour leur soutient sans relâche, pour leur patience infinie, pour leurs encouragements et pour leur aide et leur dévouement continus tout au long de mes études. C'est à eux que je dédie ce travail.

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Résumé

Comportement dynamique non-linéaire de la Source Laser de l'horloge atomique PHARAO

Cédric Claes

Travail de fin d'études réalisé en vue de l'obtention du grade de master Ingénieur Civil en Aérospatiale
Année académique 2011–2012

Actuellement, l'industrie est de plus en plus confrontée à des structures présentant un comportement non linéaire. Dans de nombreux cas, ces non linéarités peuvent être négligées ou évincées et il est admis que les procédures de dimensionnement et de modélisation peuvent se limiter à des considérations linéaires. Ainsi, les modèles élément-finis développés pour la qualification des structures sont généralement linéaires.

Cependant, il peut arriver que les essais expérimentaux réalisés sur les structures mettent en exergue un comportement non linéaire important, remettant en cause la validité des modèles linéaires. La non linéarité ne peut alors plus être évincée et il est nécessaire de la prendre en compte lors de la modélisation.

Ce travail se concentre sur un cas concret observé récemment lors des essais de qualification de la Source Laser du module *PHARAO* pour *Projet d'Horloge Atomique par Refroidissement d'Atome en Orbite*. En effet, lors de ceux-ci un comportement non linéaire du aux amortisseurs – comprenant une couche d'élastomère – soutenant le banc optique a pu être mis en évidence.

Les objectifs de ce travail sont, tout d'abord, de présenter et prendre en main le module d'intégration temporelle adapté aux systèmes non linéaire du logiciel *MSC.Nastran*, la SOL 129. La grande sensibilité de celui-ci et l'apparition d'erreurs, déjà soulignées lors de précédentes études, ont été repérée. Un choix de paramètres d'intégrations adaptés permettant de faire disparaitre ces erreurs a pu être identifié. Deux modèles équivalents et très simples ont été traités et les résultats obtenus comparés avec ceux donnés par *SAMCEF Mecano* et un algorithme d'intégration de Newmark codé sous *MATLAB*.

L'étude d'un amortisseur seul, tel qu'il a été testé par le concepteur *GAMMA* lors des essais de qualification, a été réalisée. Nous décrirons la modélisation éléments-finis adoptée et soulignerons le choix des paramètres de calculs. La première étape de l'étude consiste en le recalage de la loi élastique non linéaire de l'élastomère présent dans l'amortisseur sur base des données récoltées lors des essais. Une correspondance, présentant une erreur de moins de 3%, a pu être déterminée.

Le système ainsi recalé a, ensuite, été soumis à une excitation de type CHIRP en vue d'une identification de la loi non linéaire précédemment injectée. La méthode d'identification de la *Restoring Force Surface*, appliquée dans ce travail, a ainsi été mise à l'épreuve. Le modèle identifié correspond assez fidèlement aux réponses calculées. En particulier, la courbe de raideur déduite de la surface de *Crawley & O'Donnell* construite au moyen de la réponse et celle identifiée présentent une différence à moins de 5% sur leur plus grande partie. Cependant, la courbe de raideur déterminée par le module de chargement statique de *MSC.Nastran*, la SOL 106, présente un comportement plus rigide que les deux courbes précédentes. Ce résultat pourrait témoigner d'une simulation temporelle incorrecte en raison des problèmes soulignés dans la première étape de ce travail.

Introduction

Actuellement, l'industrie est de plus en plus confrontée à des structures présentant un comportement non linéaire. Dans de nombreux cas, ces non linéarités peuvent être négligées ou évincées et il est admis que les procédures de dimensionnement et de modélisation peuvent se limiter à des considérations linéaires. Ainsi, les modèles élément-finis développés pour la qualification des structures sont généralement linéaires.

Cependant, il peut arriver que les essais expérimentaux réalisés sur les structures mettent en exergue un comportement non linéaire important, remettant en cause la validité des modèles linéaires. La non linéarité ne peut alors plus être évincée et il est nécessaire de la prendre en compte lors de la modélisation.

Malheureusement, l'expérience industrielle dans le domaine des systèmes non linéaires est limitée. C'est pourquoi des études au sien du *Centre National d'Etudes Spatiales* et du groupe *EADS* visant à valider les capacités d'intégration et de prise en compte des non linéarités dans des modèles éléments-finis sont, encore à l'heure d'aujourd'hui, en cours. L'étude *DyNoLi*, par exemple, a ainsi tâché de prendre en compte des non linéarités de plusieurs types dans des modèles relativement simples. Cette étude a conduit à la formulation d'une série de recommandations, conseils et observations quant à la simulation temporelle de systèmes non linéaires au moyen du logiciel *MSC.Nastran*. En outre, des comparatifs des différents logiciels de calcul éléments-finis ont pu être dressés.

Ces démarches s'inscrivent dans la procédure de *Vérification et Validation* des modèles, notamment développée par le *Los Alamos National Laboratory*. Celle-ci est destinée à garantir l'utilisation de modèles représentatifs du cas réel, en lesquels l'utilisateur peut avoir confiance. Elle propose aux ingénieurs une méthodologie complète, leur permettant de réaliser une modélisation fiable avec des indicateurs de confiance quantifiables.

En particulier, l'étape de recalage est cruciale. Elle consiste à introduire, dans les modélisations sur ordinateur, les comportements non linéaires observés lors des essais. Elle implique donc la comparaison des réponses données par le modèles à celles mesurées expérimentalement. C'est alors qu'entrent en jeux les méthodes d'identifications, telles que la méthode de la *Restoring Force Surface* qui sera éprouvée dans ce travail. Son but est de quantifier et d'estimer le comportement non linéaire afin de pouvoir rendre le modèle éléments-finis plus représentatif de la réalité.

Cette méthode se distingue par sa simplicité de mise en oeuvre et la précision des résultats obtenus. Non seulement, elle détecte la présence d'une non linéarité, mais permet d'estimer un modèle mathématique permettant de la représenter. Présentée par Masri et Caughey [25] en 1979 pour les systèmes à un degré de liberté, elle a fait l'objet d'une attention particulière, ce qui lui a permis de bénéficier de nombreuses améliorations. Elle a pu être éprouvée dans de nombreux cas pratiques [18, 26] et a montré de grandes capacités d'identification pour une faible sensibilité aux bruits des signaux d'entrée. Malheureusement, cette méthode nécessite l'obtention des signaux temporels du système étudié, ce qui n'est pas toujours évident dans des cas pratiques. Toutefois, les procédures d'intégration performantes ont été développées et permettent, à partir de la seule connaissance de l'accélération, de déterminer les vitesses et déplacements nécessaires à la méthode [37].

Ce travail se concentre sur un cas concret observé récemment. Le module *PHARAO*, *Projet d'Horloge Atomique par Refroidissement d'Atome en Orbite*, est un programme mené par le *C.N.E.S.* depuis 1999

dans le cadre de la mission européenne *ACES – Atomic Clock Ensemble in Space* – de l'*European Space Agency*. *ACES* est une charge utile destinée à être fixée en position nadir à à l'extérieur du module *Columbus* de la *Station Spatiale Internationale*. Elle sera composée d'instruments complexes à la pointe du progrès et combine deux éléments principaux : l'horloge atomique *PHARAO*, développée par le *C.N.E.S.*, ainsi que du *Maser à Hydrogène Spatial – SHM* pour *Space Hydrogen Maser* –, développé en Suisse par la société *Spectra Time*.

Lors de la qualification de la Source Laser, principal sous-système composant l'horloge atomique, un comportement non linéaire important a pu être mis en évidence au niveau des amortisseurs soutenant le banc optique. Heureusement, il ne mettait pas à mal le bon fonctionnement et la validation du modèle. Néanmoins, il s'agit d'un cas concret, récent, parfait pour l'application de la méthode d'identification de la *Restoring Force Surface*. Malheureusement, la connaissance des amortisseurs et, en particulier, de la couche d'élastomère sur laquelle ils se basent sont mal connus et de nombreuses hypothèses devront être effectuées.

Le but de ce travail est, dès lors, de démontrer la capacité ou non de la *Restoring Force Surface* à identifier ce type de non linéarité en vue d'une introduction future dans un modèle éléments-finis. Ce rapport s'articulera comme suit.

Tout d'abord, nous prendrons en main le logiciel d'éléments-finis utilisé par le *C.N.E.S.*, *MSC.Nastran* et, en particulier, son module d'intégration implicite adapté aux systèmes non linéaire, la SOL 129. Nous présenterons brièvement le logiciel et détaillerons les méthodes d'intégration sur lesquelles ils se basent. En guise d'exemple et d'exercices, nous tâcherons de simuler deux systèmes équivalents très simples, le premier à un seul degré de liberté, le second à plusieurs degrés de liberté. Les résultats seront comparés à ceux obtenus avec d'autres logiciels à savoir *SAMCEF Mecano*, d'une part, et un schéma d'intégration directe de Newmark codé sous *MATLAB*. Cette prise en main nous permettra de mettre en évidence la grande sensibilité du module d'intégration de *MSC.Nastran* et les nombreuses imprécisions auxquelles il est sujet.

Le Chapitre 2 s'attardera ensuite sur la description du problème traité. Nous présenterons brièvement le projet *PHARAO*, ses enjeux et ses buts. Nous poserons, ensuite, la problématique en décrivant les résultats expérimentaux obtenus pour la Source Laser et le comportement observé. De plus, nous détaillerons la stratégie adoptée pour procéder à l'identification et terminerons décrire, en détails, la méthode d'identification qui sera appliquée : la *Restoring Force Surface*. Nous proposerons au lecteur une base bibliographique riche couvrant l'ensemble de la procédure, ses développements et ses applications.

Le troisième et dernier chapitre traitera le problème d'un amortisseur considéré seul. Le modèle éléments-finis et les paramètres de calculs seront détaillés et justifiés. La première étape importante consistera à recaler la loi élastique non linéaire $\sigma = f(\epsilon)$ sur base des données obtenues grâce aux essais. Le système sera alors simulé temporellement de manière à fournir les informations nécessaire à la méthode de la *Restoring Force Surface* en vue d'une identification de la non linéarité que nous venons d'introduire. Les résultats obtenus seront discutés et la capacité de la méthode évaluée.

Enfin, nous synthétiserons les conclusions tirées tout au long de ce travail et suggérons des étapes supplémentaires visant à compléter cette étude.

Chapitre 1

Simulations temporelles sous MSC Nastran

1.1 Introduction

Ce premier chapitre a pour but de brièvement présenter au lecteur le logiciel *MSC.Nastran* utilisé dans le cadre de ce travail et, en particulier, son solveur destiné à l'analyse temporelle de systèmes non linéaires. Deux modèles très simples seront réalisés et simulés. Les résultats obtenus seront comparés à ceux obtenus avec d'autres logiciels tels que *SAMCEF* ou au moyen d'un algorithme de Newmark non linéaire codé sous *MATLAB*. Nous détaillerons les méthodes employées par ces différents solveurs.

Dans le but de permettre au lecteur intéressé de bénéficier de l'expérience acquise, durant ce travail, dans l'utilisation du solveur d'analyse temporelle non linéaire de *MSC.Nastran*, nous soulignerons, tout au long de ce chapitre, les particularités de cet outil et les commandes clés qui lui sont associées. Nous n'entrerons, cependant, pas dans des détails qui pourraient alourdir la lecture. C'est pourquoi nous conseillons fortement aux lecteurs intéressés de se référer aux manuels utilisateur proposés par *MSC* [4, 2, 3, 29].

Nous verrons que le module d'analyse temporelle proposé par *MSC.Nastran* – qu'il s'agisse du module historique "SOL 129" ou de sa nouvelle version "SOL 400" – demande une attention très particulière. En effet, l'une comme l'autre sont sujettes à des erreurs qui peuvent, soit entâcher la précision de la solution obtenue, soit, dans le pire des cas, mener à une réponse totalement différente. Nos recherches nous ont mené à privilégier l'un des trois critères de convergence proposés, ainsi qu'une stratégie de mise à jour de la matrice de raideur tangente précise.

Les rapports rédigés dans le cadre de l'étude R&T *DyNoLi* menée par *EADS-Astrium* et le *C.N.E.S.* [6, 34] nous serviront de base pour un premier choix de paramètre, mais aussi de base de comparaison avec les observations faites ici.

1.2 Logiciels et méthodes utilisés

1.2.1 MSC.Nastran

Nastran, i.e. *NAsa STUctural ANalysis*, est un logiciel développé dans les années 60, initialement destiné à la NASA. Une version public, *MSC.Nastran* a été développée et commercialisée par la société *MacNeal-Schwendler Corportation*. Il s'agit, à l'heure actuelle, du logiciel basé sur la méthode des éléments finis le plus utilisé dans le monde. Il est ainsi présent dans de nombreux secteurs tels que l'automobile, les énergies renouvelables, la machinerie ou le domaine médical. Grâce à ses origines, *MSC.Nastran* est également devenu un standard dans les domaines de l'aéronautique et du spatial. On estime que quasiment tous les engins spatiaux, avions et véhicules développés dans les 40 dernières années l'ont été en faisant usage de ce logiciel.

MSC.Nastran offre une large gamme de solveurs, chacun adapté à une tâche particulière dont voici une liste non-exhaustive [4] :
- Analyse statique (SOL 101) ;
- Analyse modale (SOL 103) ;
- Analyse dynamique transitoire linéaire (SOL 109) ;
- Analyse dynamique transitoire non linéaire (SOL 129) ;
- Analyse dynamique par superposition modale (SOL 112) ;
- Analyse aéroélastique (SOL 146) ;
- Analyse thermique temporelle (SOL 159) ;
- ...

Le module d'analyse dynamique transitoire non linéaire SOL 129 se base sur l'algorithme d'intégration implicite de Newmark non linéaire [30]. Cette procédure permet d'intégrer l'équation du mouvement (1.1), dont les matrices de masse $\mathbf{M}$, d'amortissement $\mathbf{C}$ et des forces internes (linéaires ou non) $\mathbf{F}$ sont évaluées grâce à la méthode des éléments finis. Plusieurs méthodes sont disponibles en fonction des paramètres définis.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}(\mathbf{q}) = \mathbf{P}(t) \tag{1.1}$$

Les méthodes d'intégration type Newmark permettent donc de déterminer, à chaque pas de temps discret Δt, les déplacements $\mathbf{q}$, les vitesses $\dot{\mathbf{q}}$ et les accélérations $\ddot{\mathbf{q}}$ de chaque degré de liberté du système étudié, satisfaisant l'équilibre des efforts. Les méthodes disponibles sont au nombre de deux :
- La méthode d'intégration directe de Newmark ;
- Une méthode Newmark-Beta à trois points.

Méthode d'intégration directe de Newmark

La première réécrit les équations de Newmark classique :

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_{n+1} &= \mathbf{q}_n + \Delta t\dot{\mathbf{q}}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\Delta t^2\ddot{\mathbf{q}}_n + \beta\Delta t^2\ddot{\mathbf{q}}_{n+1} \\
\dot{\mathbf{q}}_{n+1} &= \dot{\mathbf{q}}_n + (1-\gamma)\,\Delta t\ddot{\mathbf{q}}_n + \gamma\Delta t\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}
\end{aligned}$$

sous la forme :

$$\dot{\mathbf{q}}_{n+1} = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\left(\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n\right) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)\dot{\mathbf{q}}_n + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\Delta t\ddot{\mathbf{q}}_n \tag{1.2}$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_{n+1} = \frac{1}{\beta\Delta t^2}\left(\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n\right) - \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{\mathbf{q}}_n - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\Delta t\ddot{\mathbf{q}}_n \tag{1.3}$$

Dans un cas non linéaire, un processus de prédiction/correction est nécessaire pour déterminer l'état du système aux pas de temps suivant, les équations (1.2) et (1.3) peuvent alors se réécrire :

$$\dot{\mathbf{q}}_{n+1}^{i+1} = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\left(\mathbf{q}_{n+1}^{i+1} - \mathbf{q}_n\right) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)\dot{\mathbf{q}}_n + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\Delta t\ddot{\mathbf{q}}_n \tag{1.4}$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}^{i+1} = \frac{1}{\beta\Delta t^2}\left(\mathbf{q}_{n+1}^{i+1} - \mathbf{q}_n\right) - \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{\mathbf{q}}_n - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\Delta t\ddot{\mathbf{q}}_n \tag{1.5}$$

i étant l'indice représentant les itérations de corrections :

$$\mathbf{q}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{q}_{n+1}^{i} + \Delta\mathbf{q}^{i+1}$$

La correction $\Delta \mathbf{q}^{i+1}$ résulte de l'annulation des forces résiduelles $\mathbf{R}_{n+1}^{i}$ présentes dans le système grâce à la méthode de Newton-Raphson :

$$\mathbf{R}_{n+1}^{i} = \overbrace{\left[\frac{1}{\beta \Delta t^{2}}\mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t}\mathbf{C} + \mathbf{K}_{n+1}^{i}\right]}^{\mathbf{S}^{i}} \Delta \mathbf{q}^{i+1}$$

avec

$$\mathbf{R}_{n+1}^{i} = \mathbf{P}_{n+1} - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}^{i} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}_{n+1}^{i} - \mathbf{F}(\mathbf{q}_{n+1}^{i})$$

Il est important de souligner que la matrice de raideur tangente $\mathbf{K}_{n+1}^{i}$ – et donc le vecteur des forces internes – change à chaque itération et correction. Il est, dès lors, nécessaire de la tenir à jour au moyen de la méthode des éléments finis. Cependant, cette opération est coûteuse en temps de calcul, et d'autres stratégies peuvent être envisagées. L'activation de la méthode de Newton modifiée, par exemple, remplace $\mathbf{K}_{n+1}^{i}$ par $\mathbf{K}_{n}$ ou par $\bar{\mathbf{K}}$ qui est l'une des matrices de raideur évaluées aux précédents pas de temps.

Dans les équations de Newmark, les paramètres γ et β ont un rôle primodial définissant les propriétés de l'algorithme, en particulier, sa stabilité. Pour un système linéaire, il est possible de garantir la stabilité inconditionnelle lorsque les paramètres choisis respectent les relations [12] :

$$\gamma \geq \frac{1}{2} \qquad \beta \geq \frac{1}{4}\left(\gamma + 1\right)^{2}$$

Malheureusement, pour des cas non linéaires – matériau élastique non linéaire, écrouissage, contact, grandes déformations, ... – ces propriétés ne sont plus garanties. En particulier, la stabilité inconditionnelle est perdue. Les valeurs des paramètres γ et β ci-dessus L'utilisation d'une méthode de type Newton-Raphson pour satisfaire l'équilibre des forces à chaque pas de temps implique que le pas de temps choisi régit non seulement la précision de la réponse obtenue, mais également la stabilité générale de l'algorithme. D'une manière générale, il doit, dès lors, être réduit par rapport à un cas linéaire. Afin de pouvoir garantir la stabilité et la précision, sans augmenter excessivement le temps CPU, des algorithmes d'adaptation automatique du pas de temps ont été développés [23, 11].

Les valeurs clés des paramètres γ et β, quant à elles, ne sont plus valables. Cependant, elles constituent, tout de même, un bon point de départ. Ainsi, lorsqu'aucun amortissement numérique n'est considéré, *MSC.Nastran* considère l'algorithme dit de l'accélération moyenne constante :

$$\gamma = \frac{1}{2} \qquad \beta = \frac{1}{4}$$

MSC.Nastran offre également l'opportunité d'introduire de l'amortissement numérique dans le modèle. Dans ce cas, l'équation (1.2) est alors remplacée par l'expression suivante :

$$\dot{\mathbf{q}}_{n+1} = \frac{2 - 2\alpha}{\Delta t}\left(\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_{n}\right) - \left(1 - 2\alpha\right)\dot{\mathbf{q}}_{n}$$

où α est le coefficient d'amortissement numérique. Ce dernier permet d'augmenter la stabilité de l'intégrateur, sans avoir à réduire le pas de temps. Toutefois, fixé à des valeurs élevées, il modifie également la réponse obtenue. C'est pourquoi *MSC.Software* conseille de ne pas dépasser une valeur de 0,1 pour ce paramètre.

Méthode d'intégration à trois points

La méthode d'intégration à trois points, également disponible dans la SOL 129, se base sur le calcul du résidu au temps t_n :

$$\mathbf{R}_{n} = \bar{\mathbf{P}}_{n} - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_{n} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}_{n} - \bar{\mathbf{F}}_{n} \tag{1.6}$$

où $\bar{\mathbf{F}}_(n)$ et $\bar{\mathbf{P}}_(n)$ sont respectivement des pondérations des forces internes et externes sur les trois pas de temps t_{n-1}, t_n et t_{n+1} :

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{F}}_n &= \beta\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{q}_{n+1}) + (1-2\beta)\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{q}_n) + \beta\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{q}_{n-1})\\ \bar{\mathbf{P}}_n &= \beta\bar{\mathbf{P}}(\mathbf{q}_{n+1}) + (1-2\beta)\bar{\mathbf{P}}(\mathbf{q}_n) + \beta\bar{\mathbf{P}}(\mathbf{q}_{n-1})\end{aligned}$$

β étant un paramètre. En utilisant les formules de la différence centrée, on peut exprimer l'accélération et la vitesse à tout instant comme :

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{q}}_n &= \frac{1}{\Delta t^2}\left(\Delta\mathbf{q}_{n+1} - \Delta\mathbf{q}_n\right)\\ \dot{\mathbf{q}}_n &= \frac{1}{2\Delta t}\left(\Delta\mathbf{q}_{n+1} + \Delta\mathbf{q}_n\right)\end{aligned}$$

en ayant défini $\Delta\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n$.

En substituant ces expressions dans (1.6), on obtient l'expression :

$$\mathbf{R}_n = \bar{\mathbf{P}}_n - \left[\frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} + \frac{\mathbf{C}}{2\Delta t}\right]\left(\Delta\mathbf{q}_{n+1} - \Delta\mathbf{q}_n\right) - \frac{C}{\Delta t}\Delta\mathbf{q}_n - \left[\beta\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{q}_{n+1}) + (1-2\beta)\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{q}_n) + \beta\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{q}_{n-1})\right] \quad (1.7)$$

Dans laquelle, $\mathbf{F}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{q}_{n+1}$ et $\Delta\mathbf{q}_{n+1}$ sont inconnus et devront être déterminés au moyen d'une méthode itérative, telle que Newton-Raphson, ou une version de Newton modifiée.

La stratégie adoptée est la suivante. A un nouveau pas de temps t_n, la variation de déplacement $\mathbf{d}_n = \Delta\mathbf{q}_{n+1} - \Delta\mathbf{q}_n$ est initialisée à 0 :

$$\mathbf{d}_n^0 = \Delta\mathbf{q}_{n+1}^0 - \Delta\mathbf{q}_n = 0 \Leftrightarrow \Delta\mathbf{q}_{n+1}^0 = \Delta\mathbf{q}_n$$

Le vecteur des forces internes au temps $n+1$ est, quant à lui, extrapolé à partir de ses valeurs aux deux pas de temps antérieurs t_n et t_{n-1} :

$$\mathbf{F}_{n+1}^0 \cong \mathbf{F}_n + (\mathbf{F}_n - \mathbf{F}_{n-1}) = 2\mathbf{F}_n + \mathbf{F}_{n-1}$$

En injectant ces deux relations dans l'équation (1.7), on obtient alors une première estimation des efforts résiduels à l'instant t_n :

$$\mathbf{R}_n^0 = \bar{\mathbf{P}}_n - \frac{1}{\Delta t}\mathbf{C}\Delta\mathbf{q}_n - \mathbf{F}_n$$

Au cours des itérations ($i > 0$), $\mathbf{d}_n^i$ n'est plus supposé nul et le vecteur des efforts résiduels prend la forme :

$$\mathbf{R}_n^i = \mathbf{R}_n^0 - \left[\frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t}\mathbf{C}\right]\mathbf{d}_n^i - \beta\left(\mathbf{F}_{n+1}^i - \mathbf{F}_{n+1}^0\right)$$

La correction de la variation de déplacement $\mathbf{d}_n^{i+1}$ est obtenue en considérant tout d'abord l'approximation linéaire de l'équation (1.7) :

$$\mathbf{R}_n^{i+1} \cong \mathbf{R}_n + \frac{\partial\mathbf{R}_n}{\partial\mathbf{d}_n}\left(\mathbf{d}_n^{i+1} - \mathbf{d}_n^i\right) = 0$$

On a alors :

$$\begin{aligned}\mathbf{d}_n^{i+1} - \mathbf{d}_n^i &= -\left[\frac{\partial\mathbf{R}_n}{\partial\mathbf{d}_n}\right]^{-1}\mathbf{R}_n\left(\mathbf{d}_n^i\right)\\ &= -\left[\frac{\partial\mathbf{R}_n}{\partial\mathbf{d}_n}\right]^{-1}\mathbf{R}_n^i\end{aligned}$$

Vu l'équation (1.7), la matrice $\left[\frac{\partial \mathbf{R}_n}{\partial \mathbf{d}_n}\right]$ est donnée par :

$$\left[\frac{\partial \mathbf{R}_n}{\partial \mathbf{d}_n}\right] = -\left[\frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t}\mathbf{C} + \beta\bar{\mathbf{K}}\right]$$

avec $\bar{\mathbf{K}} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{q}}$, la matrice de raideur tangente.

On peut montrer que la méthode d'intégration à trois points est moins sujettes aux problèmes de stabilité que la méthode d'intégration directe. Cependant, aucun amortissement numérique ne peut y être introduit, pour contrer une éventuelle instabilité. Cette procédure reste, donc, moins recommendée et peu utilisée en pratique.

Algorithme d'adaptation automatique du pas de temps

Dans le but d'augmenter les performances de l'algorithme d'intégration directe de Newmark et de simplifier sa prise en main, plusieurs fonctionnalités supplémentaires ont été ajoutées, telles qu'un algorithme de mise à jour de type quasi-Newton et une méthode de recherche de direction d'optimisation [27]. En particulier, un algorithme d'adaptation automatique du pas de temps, ainsi qu'une procédure de bissection en cas de divergence sont disponibles. Ils ont pour but de rendre l'algorithme d'intégration presque complètement automatique, tout en garantissant l'obtention d'une solution précise à chaque problème pour un coût de calcul réduit. Les prémices de cette procédure ont été établis par Bergan et Mollestad [13] en 1985, puis ont été considérablement améliorés dans les versions suivantes du logiciel [23], même si quelques difficultés peuvent, toutefois, survenir lors d'un brusque changement de raideur – comme lors d'un jeu ou d'une entrée en plasticité.

L'algorithme de pas de temps adaptatif calcule sur base de la fréquence dominante contenue dans la réponse à un incrément de déplacement, le pas de temps maximal permettant de rendre cette dernière précisément :

$$\omega_n^2 = \frac{\{\Delta\mathbf{q}_n\}^T\mathbf{K}\{\Delta\mathbf{q}_n\}}{\{\Delta\mathbf{q}_n\}^T\mathbf{M}\{\Delta\mathbf{q}_n\}} \cong \frac{\{\Delta\mathbf{q}_n\}^T\{\mathbf{F}_n - \mathbf{F}_{n-1}\}}{\{\Delta\mathbf{q}_n\}^T\mathbf{M}\{\Delta\mathbf{q}_n\}}$$

où $\{\Delta\mathbf{q}_n\} = \{\mathbf{q}_n - \mathbf{q}_{n-1}\}$ est l'incrément de déplacement observé et $\{\mathbf{F}_n - \mathbf{F}_{n-1}\}$ la variation de force interne directement accessible. Il est judicieux de noter que ce rapport peut être faussé par des termes de masse $\mathbf{M}$ et/ou de raideur $\mathbf{K}$ particulièrement élevés ou faibles pour certains degrés de liberté. C'est le cas, par exemple, d'une masse importante munie d'une grande raideur pour représenter le sol (dans le cas d'une excitation par la base) ou d'un jeu dans le modèle. L'algorithme procède alors à une "élimination" de ces degrés de liberté particuliers avant le calcul de la fréquence dominante.

Le nouveau pas de temps est alors défini en multipliant le pas de temps actuel par un facteur d'échelle, r :

$$r = \frac{\Delta t_{n+1}}{\Delta t_n} = \frac{1}{m}\frac{2\pi}{\omega_n}\frac{1}{\Delta t_n}$$

où m est un paramètre permettant de définir le nombre de pas de temps désirés par période.

De manière à éviter une adaptation du pas de temps à chaque itération qui serait particulièrement consommatrice en temps de calcul, on introduit la fonction $f(r)$ telle que :

$$\Delta t_{n+1} = f(r)\Delta t_n$$

$f(r)$ prenant les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned}
f = 0.25 \quad & \text{si} \quad r < 0.5R_b \\
f = 0.5 \quad & \text{si} \quad 0.5R_b \leq \ r < R_b \\
f = 1 \quad & \text{si} \quad R_b \leq \ r < 2 \\
f = 2 \quad & \text{si} \quad 2 \leq \ r < \frac{3}{R_b} \\
f = 4 \quad & \text{si} \quad \frac{3}{R_b} \leq \ r
\end{aligned}$$

R_b étant un paramètre fixé par l'utilisateur, dont la valeur par défaut est 0,75.

Grâce à cette multiplication ou division par 4, un pas de temps mal choisi pourra être rapidement ajusté. Cependant, vu que le pas de temps est déterminé à partir de la réponse calculée et non du chargement appliqué, il peut être nécessaire de limiter cette adaptation de manière à pouvoir saisir parfaitement des efforts de période beaucoup plus courte que la fréquence dominante évaluée, comme des impulsions. Il s'agit du rôle du paramètre MAXR. Le pas de temps déterminé par l'algorithme d'adaptation automatique est alors compris dans l'intervalle :

$$\frac{\text{DT}}{\text{MAXR}} \leq \text{dt} \leq \text{MAXR . DT}$$

où DT est le pas de temps initial choisit par l'utilisateur lors de la définition de la carte TSTEPNL. Soulignons que le pas de temps peut être réduit en-deçà de cette limite par l'algorithme de bissection.

Ce dernier a été implémenté pour surmonter les éventuels cas de divergence ou les problèmes liés à un changement brusque de comportement – suite à une grande variation de raideur, par exemple. Trois situations déclenchent l'activation de la bissection :

- Lorsque l'incrément de contrainte sur la loi matériau est supérieur à une tolérance choisie ;
- Lorsqu'un cas de divergence est détecté ;
- Lorsque le nombre maximal d'itérations par pas de temps est atteint sans convergence.

Dans un de ces cas, la matrice de raideur est, d'abord, mise à jour à partir du dernier pas ayant convergé. Si cette mise à jour ne permet pas la convergence, la bissection a lieu :

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta t}{2}$$

Celle-ci est effectuée jusqu'à convergence de la solution ou atteinte du nombre limite de bissections autorisées par l'utilisateur :

$$\Delta t_i = \frac{\Delta t}{2^i}$$

Une fois la convergence atteinte, le pas de temps Δt_k est conservé jusqu'à complétion de l'intervalle de temps définie par le pas de temps initial, avant bissection. Si aucun problème de convergence supplémentaire n'est rencontré, des procédures visant à rétablir le pas de temps à sa valeur initiale sont activées.

Critères de convergence

Trois critères de convergences sont disponibles : le premier est basé sur le déplacement, le second sur l'équilibre des forces et le troisième sur le travail. L'utilisateur peut choisir l'un de ces trois critères ou toutes combinaisons de ceux-ci et définit leurs tolérances respectives. Les erreurs relatives sur ces trois critères sont calculées au moyen des formules suivantes :

- Pour le déplacement ("U") :

$$E_q^i = \frac{\lambda^i \left\| \mathbf{q}^i - \mathbf{q}^{i-1} \right\|}{(1 - \lambda^i)\, \mathbf{q}_{max}}$$

– Pour l'équilibre des forces ("P") :

$$E_p^i = \frac{\left\| \mathbf{R}^i \right\|}{\max\left(\|\mathbf{F}_n\|, \|\mathbf{P}_n\| \right)}$$

– Pour le travail ("W") :

$$E_w^i = \frac{\left\{ \mathbf{q}^i - \mathbf{q}^{i-1} \right\}^T \mathbf{R}^i}{\max\left(\left\| \{\mathbf{q}_n\}^T \{\mathbf{F}_n\} \right\|, \left\| \{\mathbf{q}_n\}^T \{\mathbf{P}_n\} \right\| \right)}$$

où :
– λ est le taux de convergence donné par :

$$\lambda^i = \frac{E_p^i}{E_p^{i-1}}$$

Il est important de souligner qu'en raison de sa définition faisant intervenir le taux de convergence, le critère sur le déplacement nécessitera au minimum deux itérations à chaque pas de temps.

Résulats généraux d'études antérieures

Le Lot 3.1 de l'étude R&T menée par le *C.N.E.S.* et *EADS-ASTRIUM* sur le développement de méthodes d'analyse de systèmes mécaniques non linéaires [6] a permis de mettre en évidence la grande sensibilité de la réponse calculée en fonction du pas de temps utilisé et des critères de convergence choisis. Les auteurs conseillent fortement d'éviter l'utilisation de l'algorithme d'adaptation automatique du pas de temps, en particulier lorsque la bande de fréquence étudiée est proche de la fréquence de résonance du système. Ce module sera, dès lors, désactivé afin de garder un contrôle sur ce paramètre d'intégration. D'autre part, l'algorithme de Newmark codé sous *MATLAB* n'étant équipé d'aucun de ces modules, l'algorithme de bissection sera également désactivé afin d'établir une base commune de comparaison des réponses obtenues par *MSC.Nastran* et par *MATLAB*.

Cette étude conclut, également, que le critère de convergence basé sur le déplacement E_q^i semble être plus fiable et conduit à de meilleurs résultats que les autres critères, peu importe la tolérance fixée. La combinaison "déplacement + travail" s'est révélée être la plus efficace. L'étude a, en outre, souligné l'importance d'inclure de l'amortissement dans le modèle afin d'assurer une certaine stabilité. Dans ce présent travail, nous n'oublierons donc pas de définir les coefficients d'amortissement structural de tous les matériaux utilisés et, insérerons, si cela se révélait nécessaire, de l'amortissement numérique.

Enfin, l'utilisation de super-éléments générés dans *MSC.Nastran* au moyen de la SOL 103 ne posant aucun problème, celle-ci est vivement conseillée afin de réduire les temps de calculs qui peuvent se révéler particulièrement longs.

1.2.2 SAMCEF Mecano

SAMCEF, i.e. *Système pour l'Analyse des Milieux Continus par Eléments Finis*, voit le jour en 1965, au sein du *LTAS*, i.e *Laboratoire des Techniques Aéronautiques et Spatiales*, à l'Université de Liège. En 1986, la société *Samtech* naît et prend en charge le développement et la commercialisation de *SAMCEF*. En 2011, *Samtech* est racheté par la société *LMS International* et devient *LMS Samtech*. *SAMCEF* offre une large gamme de solveurs à vocation polyvalente capable de satisfaire à un grand nombre d'applications : analyse statique, analyse modale, vibrations aléatoires, mouvement non-linéaire, ... D'autres modules, spécialisés dans des domaines précis, sont également disponibles :
– *SAMCEF Rotors* – études dynamiques de rotors ;
– *SAMCEF Wind Turbines* – développment et optimisation des éoliennes ;

– *BOSS Quatro* – optimisations multidisciplinaires et analyses de sensibilité ;
– ...

Dans cette étude, nous ferons appel au module de simulation temporelle *SAMCEF Mecano*. Celui-ci est capable de mener des analyses temporelles de système non-linéaire avec un haut niveau de précision, tout en gardant des temps de calculs raisonnables. Il comprend également une procédure d'analyse éléments finis permettant de traiter des problèmes complexes de grande taille. La résolution temporelle de l'équation du mouvement et réalisée au moyen des schémas d'intégration classiques basés sur la méthode de Newmark à un pas. Quatre schémas sont disponibles :

– La méthode directe de Newmark ;
– La méthode d'Hilbert-Hughes-Taylor ;
– La méthode de Chung-Hulbert ;
– La méthode du point milieu généralisé.

Nous ne détaillerons pas ici la méthode du point milieu généralisé qui est particulière et n'a pas été utilisée ici. Nous référons le lecteur intéressé à la documentation du logiciel *SAMCEF* pour de plus amples informations.

Méthode directe de Newmark

La première est la méthode d'intégration de Newmark à un pas. Celle-ci est identique à la méthode implémentée dans *MSC.Nastran*, présentée au paragraphe correspondant de la section 1.2.1 à ceci près que *SAMCEF Mecano* utilise les expressions :

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_{n+1} &= f\left(\mathbf{q}_n,\ \dot{\mathbf{q}}_n,\ \ddot{\mathbf{q}}_n, \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}\right)\\ \dot{\mathbf{q}}_{n+1} &= f\left(\dot{\mathbf{q}}_n,\ \ddot{\mathbf{q}}_n, \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}\right)\end{aligned}$$

Plutôt que leurs reformulations utilisées sous *MSC.Nastran* :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}}_{n+1} &= f\left(\mathbf{q}_n,\ \mathbf{q}_{n+1},\ \dot{\mathbf{q}}_n,\ \ddot{\mathbf{q}}_n\right)\\ \dot{\mathbf{q}}_{n+1} &= f\left(\mathbf{q}_n,\ \mathbf{q}_{n+1},\ \dot{\mathbf{q}}_n,\ \ddot{\mathbf{q}}_n\right)\end{aligned}$$

D'autre part, *SAMCEF Mecano* offre le choix à l'utilisateur des valeurs des paramètres β et γ. Il est ainsi possible d'avoir un certain contrôle sur les propriétés du schéma d'intégration direct, en particulier, sa stabilité et sa précision. La Table 1.1 présente une série de valeurs clés, généralement utilisées dans la littérature. Soulignons, à nouveau, que ces propriétés ne sont garanties que pour la version linéaire du schéma de Newmark. Ces valeurs sont données à titre indicatif. Le lecteur intéressé pourra se tourner vers la référence bibliographique [12] pour de plus amples informations. On remarque immédiatement qu'un compromis est à réaliser entre précision et stabilité. Néanmoins, le désir d'assurer la stabilité de l'intégrateur l'emporte généralement. La méthode dite de l'*accélération moyenne constante* – $\gamma = \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{1}{4}$ –, inconditionnellement stable pour les cas linéaire et d'une précision au second ordre, est, donc, la plus souvent utilisée en pratique.

Le schéma *purement explicite* – $\gamma = \beta = 0$ – possède la particularité d'être très rapide, très simple d'application et très peu coûteux, cela car il suppose que l'état du système au temps $n+1$ est entièrement et uniquement défini par son état au temps t_n. Il reste, toutefois, instable peu importe la valeur du pas de temps choisie. C'est pourquoi cet algorithme est, le plus souvent, destiné à tester de nouveaux systèmes ou de nouvelles idées.

Enfin, le schéma de l'*accélération moyenne constante modifié* – $\gamma = \frac{1}{2} + \alpha$ et $\beta = \frac{1}{4}\left(1+\alpha\right)^2$ – offre la possibilité d'ajouter un amortissement numérique, représenté par le paramètre α, au système. Cet amortissement a pour but de faire disparaitre les composantes hautes fréquences de la réponse. En

	β	γ	Limite de stabilité	Erreur d'amplitude	Erreur de période
Purement explicite	0	0	0	$\frac{\omega^2 h^2}{4}$	–
Différence centrée	$\frac{1}{2}$	0	2	0	$\frac{-\omega^2 h^2}{24}$
Fox & Goodwin [14]	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	$2,45$	0	$O\left(h^3\right)$
Accélération linéaire	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$3,46$	0	$\frac{\omega^2 h^2}{24}$
Accélération moyenne constante	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	∞	0	$\frac{\omega^2 h^2}{12}$
Accélération moyenne constante (modifiée)	$\frac{1}{2}+\alpha$	$\frac{1}{4}\left(1+\alpha\right)^2$	∞	$-\alpha\frac{\omega^2 h^2}{2}$	$\frac{\omega^2 h^2}{24}$

TABLE 1.1 – Valeurs couramment utilisées pour les paramètres α et β – tirées de [12].

effet, la discrétisation d'une structure réelle – continue – en éléments finis – discrets – implique une mauvaise évaluation des fréquences propres élevées. Ces dernières ne sont plus physiques et doivent être éliminées afin de ne pas perturber la réponse observée. Cette démarche est d'autant plus justifiée que l'on s'intéresse généralement aux phénomènes faisant intervenir les premières fréquences propres de la structure. Pour rester consistant, l'amortissement numérique introduit ne peut, donc, altérer de manière trop importante ces composantes afin de conserver une haute précision. Il est important de souligner également que cet amortissement numérique possède également un effet stabilisant, empêchant l'apparition d'instabilités, en particulier, lors de l'étude de phénomènes non-linéaires. Cependant, on peut montrer le schéma d'intégration direct de Newmark dissipatif n'est précis qu'au premier ordre, contrairement au schéma conservatif.

Méthodes de Chung-Hulbert, d'Hilbert-Hughes-Taylor et de Wood-Bossak-Zienkiewicz

Motivés par les améliorations apportées par l'introduction d'amortissement numérique, beaucoup d'autres schémas ont été développés sur base de la méthode d'intégration dissipative à un pas de Newmark, afin de dissiper de la manière la plus optimale possible les phénomènes hautes fréquences non désirés, tout en assurant une précision d'ordre deux.

Le schéma de Chung-Hulbert [15] réécrit l'équation d'équilibre au temps $n+1$ et fait apparaitre deux nouveaux paramètres de pondération α_M et α_F :

$$(1-\alpha_M)\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_{n+1} + \alpha_M\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_n + (1-\alpha_F)\mathbf{F}^{int}_{n+1} + \alpha_F\mathbf{F}^{int}n = (1-\alpha_F)\mathbf{F}^{ext}_{n+1} + \alpha_F\mathbf{F}^{ext}n$$

Cette méthode repose donc sur l'utilisation de quatre paramètres : les deux paramètres du schéma de Newmark, γ et β, ainsi que les deux nouveaux paramètres de pondération α_M et α_F reflétant l'amortissement numérique introduit dans le modèle. Les valeurs données a ces paramètres définiront les propriétés de l'algorithme d'intégration, en particulier, sa précision, sa stabilité et sa capacité à éliminer les hautes fréquences non désirées.

On a pu montrer que la précision au second ordre est obtenue si :

$$\gamma = \frac{1}{2} - \alpha_M + \alpha_F$$

Et la stabilité inconditionnelle – pour des cas linéaires – est assurée si les paramètres respectent :

$$\alpha_M \leq \alpha_F \leq \frac{1}{2}$$
$$\gamma \geq \frac{1}{2} - \alpha_M + \alpha_F$$
$$\beta \geq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \gamma\right)^2$$

Enfin, la dissipation numérique optimale des hautes fréquences est atteinte lorsque :

$$3\alpha_F - \alpha_M = 1 \qquad \beta = \frac{1}{4}\left(1 - \alpha_M + \alpha_F\right)^2$$

En combinant ces avantages, on peut lier les quatres paramètres au moyen de trois équations, qui pourront être résolues en prenant :

$$\alpha_M \in [-1,\ 0]$$

La méthode d'Hilber-Hughes-Taylor [24] correspond simplement à la méthode de Chung-Hulbert où l'on a imposé :

$$\alpha_M = 0$$

Dans ce cas, le paramètre α_F doit être choisis dans l'intervalle : $[0,\ 1/3]$. 0 correspondant au cas conservatif et $1/3$ à l'amortissement maximal des hautes fréquences, toutefois, il est généralement recommandé de choisir une valeur intermédiaire. La procédure de Wood-Bossak-Zienkiewicz [36], quant à elle, suppose :

$$\alpha_F = 0$$

De même, on peut remarquer que le schéma de Newmark non dissipatif décrit précédemment est obtenu lorsque :

$$\alpha_M = 0 \qquad \alpha_F = 0$$

La procédure de Chung-Hulbert constitue, donc, une généralisation de trois schémas. C'est pourquoi elle est également appelée la *méthode α-généralisé*.

Méthode du point milieu généralisé

Dans cette méthode, l'équation d'équilibre est écrite en un temps $t_{n+\theta}$ situé entre t_n et t_{n+1} :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_{n+\theta} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}_{n+\theta} + \mathbf{F}_{n+\theta} = \mathbf{P}_{n+\theta} \tag{1.8}$$

Le déplacement au temps intermédiaire $t_{n+\theta}$ est supposé être une interpolation linéaire des déplacements entre les instants t_n et t_{n+1} :

$$\mathbf{q}_{n+\theta} = (1-\theta)\,\mathbf{q}_n + \theta\mathbf{q}_{n+1}$$

De plus, on écrit :

$$\ddot{\mathbf{q}}_{n+\theta} = \frac{1}{\Delta t}\left(\dot{\mathbf{q}}_{n+1} - \dot{\mathbf{q}}_n\right)$$
$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n + \Delta t\left[(1-\theta)\,\dot{\mathbf{q}}_n + \theta\dot{\mathbf{q}}_{n+1}\right]$$

La stratégie adoptée pour cette méthode consiste à déterminer l'état du système au temps $t_{n+\theta}$, pour ensuite, en déduire l'état au temps t_{n+1}. En injectant ces expressions dans l'équation (1.8), on trouve l'expression des efforts résiduels :

$$\mathbf{R}^i_{n+\theta} = \mathbf{P}_{n+\theta} + \frac{1}{\theta^2\Delta t^2}\mathbf{M}\left[\mathbf{q}_n + \theta\Delta t\dot{\mathbf{q}}_n\right] - \frac{1}{\theta^2\Delta t^2}\mathbf{M}\mathbf{q}^i_{n+\theta} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}^i_{n+\theta} - F^i_{n+\theta}$$

Le procédé itératif de correction permettant de satisfaire, à une tolérance près, l'équilibre des forces est réalisé à partir de l'équation :

$$\left[\frac{1}{\theta^2\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{1}{\theta\Delta t}\mathbf{C} + \bar{\mathbf{K}}\right]\Delta\mathbf{q}_{n+\theta} = \mathbf{R}_{n+\theta}$$

$\bar{\mathbf{K}}$ étant la matrice de raideur tangente courante. La méthode est inconditionnellement stable pour les cas linéaire lorsque :

$$\theta \in [1/2,\ 1]$$

Ce schéma ne sera pas utilisé dans le cadre de cette étude et nous nous concentrerons sur les schémas de Newmark, Hilber-Hughes-Taylor et Chung-Hulbert.

Critères de convergence

Comme dans *MSC.Nastran*, le calcul de la correction $\Delta\mathbf{q}^i_{n+1}$ peut être effectuée soit au moyen de la méthode de Newton-Raphson "pure" ou au moyen d'une méthode modifiée. La méthode pure implique le calcul d'une nouvelle matrice Jacobienne :

$$\mathbf{S}^i = \left[\frac{1}{\beta\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\mathbf{C} + \mathbf{K}^i_{n+1}\right]$$

à chaque itération, tandis qu'un méthode modifiée conserve la même matrice durant plusieurs itérations consécutives, ce pour permettre un gain en temps de calcul.

Les critères de convergence disponibles permettant d'ajuster la précision désirée sont très similaires à ceux présents dans *MSC.Nastran*. On en dénombre trois : un critère basé sur le déplacement, un basé sur l'équilibre des forces et, enfin, un basé sur le travail. Une fois, tous ces critères inférieurs à leurs tolérances – fixées par l'utilisateur – respectives, le logiciel considère la procédure itérative terminée et passe au temps suivant. Ces critères prennent les formes suivantes :

– Pour le déplacement :

$$E^i_q = \frac{\left\|\mathbf{q}^i - \mathbf{q}^{i-1}\right\|}{\left\|\mathbf{q}^i\right\| + \text{QREF}}$$

– Pour l'équilibre des forces :

$$E^i_p = \frac{\left\|\mathbf{R}^i_{n+1}\right\|}{\left\|\mathbf{P}_{n+1}\right\| + \left\|\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}_{n+1} + \mathbf{F}_{n+1}\right\| + \left\|\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}\right\| + \text{TREF}}$$

– Pour le travail :

$$E^i_w = \sqrt{\frac{\left\{\mathbf{q}^i - \mathbf{q}^{i-1}\right\}^T\mathbf{R}^i}{\left\|\mathbf{W}_{int}\right\| + \left\|\mathbf{W}_{inert}\right\| + \left\|\mathbf{W}_{ext}\right\| + \text{EREF}}}$$

Les variables QREF, TREF et EREF sont choisies par l'utilisateur et constituent des valeurs de références pour respectivement le critère sur le déplacement, le critère sur l'équilibre des forces et le critère sur le travail. Ils sont particulièrement utiles lorsque les forces, les énergies ou les déplacements sont très petits et impliqueraient une explosion de l'erreur. Dans le cas des forces, cela se produirait, par exemple, lors d'une analyse purement cinématique ou lors d'un déchargement de la structure.

Pour empêcher d'interrompre le calcul en cas de légère divergence, trois autres tolérances sont définies. Lorsque le nombre maximal d'itérations est atteint sans satisfaction des critères de convergence, l'algorithme peut tolérer une erreur plus importante – caractérisées par ces tolérances "spéciales" – et continuer la simulation.

Adaptation automatique du pas de temps

SAMCEF Mecano est également équipé d'un algorithme de bissection, ainsi que d'un algorithme d'adaptation automatique du pas de temps. Le premier divise le pas de temps par la valeur maximale de réduction du pas de temps entre deux pas de temps – valeur qui est définie par l'utilisateur – et recommence depuis le dernier pas de temps convergé.

Le second fonctionne de manière beaucoup plus complexe et nous conseillons au lecteur intéressé de se référer à la documentation du logiciel [33]. Sans entrer dans trop de détails, lorsque la convergence est atteinte ou qu'une légère divergence est tolérée, le logiciel, sur demande de l'utilisateur, va tester cinq points consécutivement :

- Erreur commise par l'algorithme d'intégration ;
- Erreur commise par le schéma d'intégration des contraintes ;
- Nombre d'itération effectuée avant convergence ;
- Variation du déplacement sur le pas de temps ;
- Variation de la rotation des noeuds sur le pas de temps

A chaque test, si la valeur obtenue est supérieur à l'erreur acceptée – ou le nombre optimal défini ou la variation maximale – un nouveau pas de temps est calculé. Le pas de temps minimum trouvé pour ces cinq tests est, alors, conservé pour la prochaine itération, si, du moins, il satisfait aux valeurs maximales et minimales imposées par l'utilisateur.

1.2.3 Code MATLAB

La deuxième comparaison sera effectuée au moyen d'un code sous *MATLAB* de la méthode directe de Newmark non linéaire. Celui-ci est basé sur l'algorithme, très basique, présenté à la Figure 1.1. Les paramètres β et γ ont été choisis de manière à garantir – pour les systèmes linéaires du moins – la stabilité inconditionnelle, soit :

$$\gamma = \frac{1}{2} \qquad \beta = \frac{1}{4}$$

Le schéma d'intégration est donc conservatif.

Le principal inconvénient est que cet algorithme n'est secondé par aucune étude éléments finis. Le traitement de structure complexe n'est donc pas envisageable, puisque les coefficients de raideur, de masse et d'amortissement doivent être connus pour chaque degré de liberté traité.

De plus, il n'est ni équipé d'un algorithme de bissection, ni d'une procédure d'adaptation automatique du pas de temps. Le calcul de la correction, quant à lui, est réalisé au moyen de la méthode de Newton-Raphson pure.

Enfin, il est important de constater que le critère de convergence utlisé est ici unique et correspond à un test sur l'équilibre des forces :

$$\|\mathbf{R}_{n+1}\| \leq \epsilon \left\|\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}_{n+1} + \mathbf{F}^{int}\left(\mathbf{q}_{n+1}\right)\right\|$$

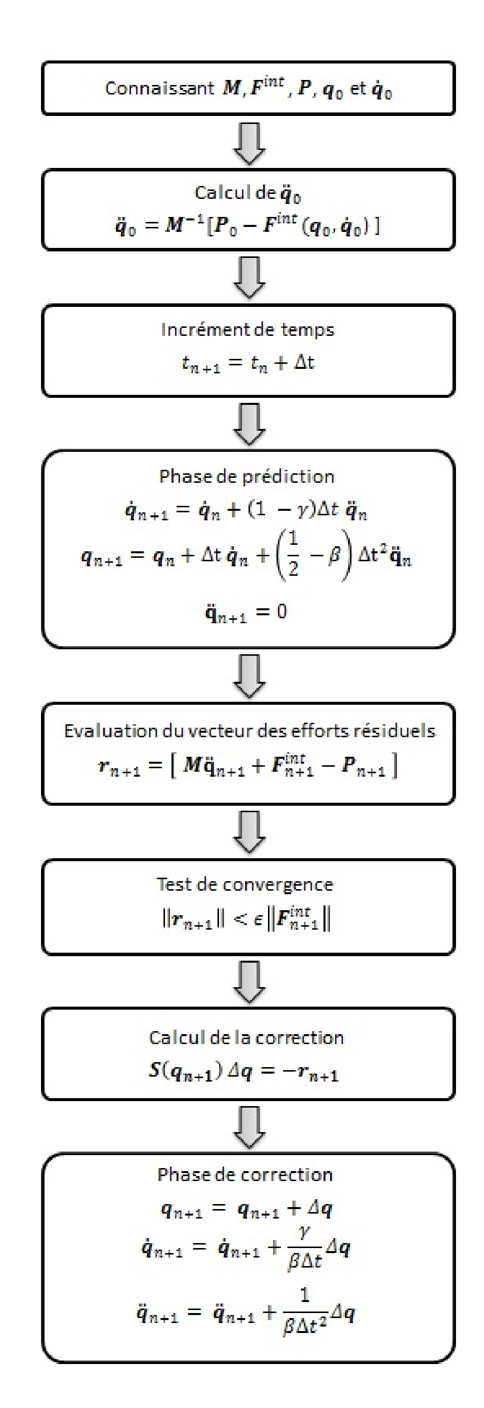


FIGURE 1.1 – Schéma de la méthode de Newmark non linéaire [12]

où ϵ est la tolérance choisie par l'utilisateur. L'effort résiduel est donc comparé aux forces internes du système.

1.3 Essais préléminaires

De manière à pouvoir correctement prendre en main *MSC.Nastran* en vue des simulations futures, nous avons entrepris d'effectuer des simulations temporelles de deux modèles non linéaires très simples. Afin de pouvoir confirmer les mouvements calculés, les résultats seront comparés avec ceux obtenus au moyen de *SAMCEF Mecano*, d'une part, et du code *MATLAB* d'autre part.

Pour rendre les résultats comparables, il est important d'établir une base commune de comparaison. Ainsi, nous n'autoriserons aucune adaptation du pas de temps. Le code *MATLAB* n'étant doté que du critère sur l'équilibre des forces, c'est ce dernier qui sera choisi dans *MSC.Nastran* et *SAMCEF*. La tolérance sera fixée à 10^{-7}.

De la même façon, le schéma d'intégration directe de Newmark utilisé dans le code *MATLAB* étant conservatif, aucun amortissement numérique ne sera introduit dans les modèles.

Modèles étudiés

Cette première étude a été effectuée dans le but de pouvoir prendre correctement en main le logiciel et de pouvoir identifier un set de paramètres conduisant à une simulation correcte. Les modèles testés sont simplistes et n'aspirent pas à représenter des cas réels, mais restent possibles. Partant d'un premier modèle à 1 degré de liberté très basique – Figure 1.2a –, nous augmenterons sa complexité en étudiant un système équivalent à plusieurs degrés de liberté – Figure 1.2b. Les propriétés de raideur, d'amortissement et de masse devront, dès lors, être identiques pour pouvoir comparer les résultats.

Le modèle à un degré de liberté se présente comme un noeud auquel est affecté une masse ponctuelle de 62,4 kg, ainsi que d'un ressort non linéaire à comportement cubique d'équation :

$$F(u) = k\ u + k_3\ u^3$$

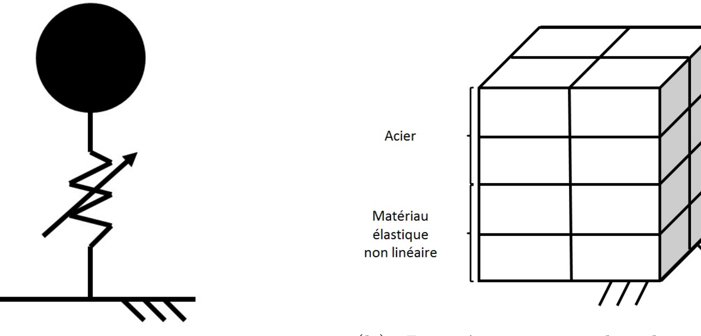
où u est le déplacement, k est la raideur linéaire sous-jaçente et k_3 la composante cubique ajoutée. Leur valeurs ont été respectivement fixées à 5 . 10^5 N/m et 5 . 10^10 N/m^3. Celles-ci ont été choisies de manière à rester raisonnables, tout en garantissant l'apparition de phénomènes propres aux systèmes non linéaires. Afin de dissiper la réponse transitoire et d'isoler la composante stationnaire, un amortissement de coefficient $c = 10^3\ N/m.s$ a également été introduit. Le système est encastré au sol et son mouvement transversal est empêché. Enfin, afin d'éviter de voir apparaitre une rotation de la masse ponctuelle, ses inerties dans les trois directions ont été fixées à des valeurs très élevées – $10^8\ kg/m^2$. Le système est, dès lors, bien un système non linéaire à un seul degré de liberté. Il s'agit d'un modèle classique, traité à de multiple reprise dans la littérature, pour lequel l'algorithme de Newmark "simple" – i.e. sans procédure complémentaire, ni amortissement numérique – a fait ses preuves.

Dans *MSC.Nastran*, le couple ressort-amortisseur non linéaire est introduit au moyen des cartes `CBUSH1D` et `PBUSH1D`. Il s'agit d'un élément unidirectionnel dont les propriétés de raideur et de dissipation sont données au moyen des quatres grandeurs :

$$F_{raideur}(u) \qquad \frac{dF_{raideur}}{du}$$

$$F_{amort}(v) \qquad \frac{dF_{amort}}{dv}$$

qui peuvent être définies soit directement par une équation, soit par une table de valeur de type `TABLE1D`. Il est également important de souligner, pour les lecteurs intéressés, que, selon *MSC.Nastran*, l'élément



(a) Représentation du premier modèle étudié.

(b) Représentation du deuxième modèle étudié.

FIGURE 1.2 – Modèles étudiés.

CBUSH1D est aligné selon l'axe X du repère dans lequel il est défini. Dans notre cas, où le mouvement est suppposé s'effectuer selon l'axe Z, il a donc été nécessaire de définir un nouveau repère dont l'axe X correspondait à l'axe Z du repère initial. Si aucun repère n'est spécifié, mais que les deux noeuds, A et B, liés par l'élément ne sont pas coïncidents, la direction A-B est considérée comme l'axe de l'élément. Enfin, si aucun repère n'est spécifié et que les deux noeuds sont coïncidents, l'élément sera aligné selon l'axe X du repère absolu – i.e. repère initial créé par le logiciel.

Dans un second temps, nous complexifierons ce premier modèle et, en particulier, remplacerons le ressort non linéaire par un matériau de loi élastique non linéaire. Ce deuxième modèle est schématisé à la Figure 1.2b. Il est composé de deux cubes, de 0,2 m – $l_0 = 0,2\ m$ – de côté chacun, posés l'un sur l'autre. Chacun sera discrétisé en 8 éléments hexaédriques de degré 1. Le cube supérieur est un cube d'acier ($\rho = 7800\ kg/m^3$ et $E = 210000$ MPa), très raide et de masse égale à $62,4$ kg. Il représente la masse ponctuelle. Le cube inférieur est, quant à lui, composé d'un matériau non linéaire équivalent au ressort non linéaire du premier modèle. Ses propriétés sont définies au moyen de la carte MATS1 combinée à la carte MAT1. La seconde est la carte classique de définition d'un matériau linéaire isotropique, tandis que la carte MATS1 permet de définir la loi $\sigma = f(\epsilon)$ non linéaire à associer au matériau. Il est ainsi possible de définir une loi élastique non linéaire – paramètre NLELAST – ou une loi d'écrouissage – paramètre PLASTIC. Dans notre cas, la loi $\sigma = f(\epsilon)$ sera définie au moyen d'une table de données de type TABLES1. Les informations d'amortissement, quant à elles, sont conservées dans la carte MAT1. Afin de ne pas modifier la répartition de masse du modèle et, ainsi, garder la même fréquence propre, la masse volumique du matériau non linéaire sera fixée à une valeur très faible : $0,001\ kg/m^3$. Cette hypothèse n'est certainement pas physique, toutefois, notre but ici est de s'assurer de la bonne prise en compte d'une loi élastique non linéaire par *MSC.Nastran*.

Notons que lorsqu'une analyse linéaire (SOL 109, SOL 101, ...) est demandée, *MSC.Nastran* se limite à l'utilisation de la carte MAT1, sans prêter attention à la carte MATS1 qui est alors inutile. Par contre, lors d'une analyse non linéaire, le logiciel utilise les données de raideur définie dans la carte MAT1 pour la première itération, puis fait appel aux propriétés définies à la carte MATS1.

Le passage d'un couple ressort-amortisseur à un matériau équivalent implique la transformation des coefficients de raideur k et k_3, ainsi que du coefficient d'amortissement c en une équation $\sigma = f(\epsilon)$, un coefficient de Poisson ν et un coefficient d'amortissement structural η. Par soucis de simplicité, nous considèrerons, tout d'abord le cas d'un ressort linéaire. Partant de l'équation de comportement d'un ressort liant la force exercée et le déplacement observé :

$$F_{raideur} = k\ .\ u$$

où F est la force appliquée, k le coefficient de raideur du ressort et $u = l - l_0$ la variation de longueur du ressort. Nous désirons transformer cette relation en une expression liant la contrainte σ et la déformation ϵ :

$$\sigma = E \ . \ \epsilon \tag{1.9}$$

ceux-ci étant défini de la manière suivante :

$$\sigma = \frac{F}{A}$$
$$\epsilon = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{u}{l_0}$$

A étant la section droite de l'échantillon. En remplaçant ces définitions dans (1.9), on trouve une relation liant E et k :

$$E = \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} = \frac{k l_0}{A} \ \text{[Pa]}$$

Dans le cas non linéaire qui nous importe ici, la force exercée par le ressort suit :

$$F_{raideur} = k \ . \ u + k_3 \ . \ u^3$$

En y injectant les définitions de la contrainte σ et de la déformation ϵ, on trouve la relation $\sigma = f(\epsilon)$:

$$\sigma = \frac{l_0}{A} k \epsilon + \frac{l_0^3}{A} k_3 \epsilon^3$$

Soit l'expression de la raideur :

$$E = \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} = \frac{l_0}{A} k + 3 \frac{l_0^3}{A} k_3 \epsilon^2$$

Comme nous pouvions nous y attendre, la raideur équivalente d'un matériau dépend, non seulement de son module de Young, mais aussi de sa section. Or cette dernière sera, en raison de la striction, variable au cours de la simulation. Ce phénomène n'étant pas considéré dans le développement ci-dessous, il n'apparait pas. Afin d'être le plus complet possible, nous devrions définir le module de Young E comme une fonction des trois paramètres : $E = f(\epsilon, \ k, \ \nu)$. Toutefois, cet effet implique l'apparition d'effet non linéaires supplémentaires, ce qui nous écarterait de notre modèle initial. C'est pourquoi nous imposerons une coefficient de Poisson nul, ce qui en d'autres mots, garantit la conservation de la section du matériau.

Concernant l'amortissement, ce dernier est défini au moyen du paramètre `GE`, contenu dans la carte `MAT1`. Il correspond au coefficient d'amortissement structural :

$$\texttt{GE} = 2 \frac{c}{c_0} = 2 \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

MSC.Nastran évalue alors la force interne d'un élément suite à sa déformation sur base de l'équation :

$$F_{int} = k \Delta u + \left(\frac{\texttt{G}}{\texttt{W3}} + \frac{\texttt{GE}}{\texttt{W4}} \right) k \Delta \dot{u}$$

Le paramètre `G` et un paramètre permettant d'injecter de l'amortissement dans l'ensemble du modèle – il ne sera pas utilisé ici. Les paramètres `W3` et `W4` pondèrent, quant à eux, l'importance de l'amortissement en fonction d'une fréquence de référence. Par défaut, si aucune valeur n'a été définies pour `W4` (respectivement `W3`), il est considéré comme égal à 0 et le terme $\frac{\texttt{GE}}{\texttt{W4}} k \Delta \dot{u}$ (respectivement $\frac{\texttt{G}}{\texttt{W3}} k \Delta \dot{u}$) est ignoré dans le calcul de la force interne.

Modèle à 1 DDL	
m [kg]	$62,4$
k [N/m]	$5\ .\ 10^5$
$\mathbf{k}_3$ [N/m^3]	$5\ .\ 10^{10}$
c [N/ms]	10^3
Modèle à plusieurs DDLs	
m [kg]	$62,4$
E [MPa]	$2,5\ .\ 10^6 + 3\ .\ 10^{10}\epsilon^2$
`GE` [-]	$0,179$
`W4` [-]	$89,4977$
Excitation	
Type	Sinus
Fréquence [Hz]	14
Amplitude [N]	$5\ .\ 10^2$
Direction	Verticale (Z)

TABLE 1.2 – Caractéristiques et propriétés des deux modèles étudiés.

En égalant la force d'amortissement définie dans le modèle à un degré de liberté et cette définition :

$$\begin{aligned} c\Delta\dot{u} &= \frac{\texttt{GE}}{\texttt{W4}} k\Delta\dot{u} \\ &= \frac{2\frac{c}{2\sqrt{km}}}{\texttt{W4}} k\Delta\dot{u} \\ &= c\sqrt{\frac{k}{m}}\frac{1}{\texttt{W4}}\Delta\dot{u} \\ &= \frac{c\omega_0}{\texttt{W4}}\Delta\dot{u} \end{aligned}$$

où ω_0 est la pulsation de résonance. On trouve donc la valeur à donner au paramètre `W4` :

$$\texttt{W4} = \omega_0 = 2\pi f_0$$

Grâce à toutes ces expressions, nous connaissons désormais les valeurs à affecter à chaque paramètre. La Table 1.2 synthétise l'ensemble de ces caractéristiques pour, respectivement, le premier et le second modèle.

L'analyse modale du premier modèle témoigne d'un unique mode d'extension/compression du ressort survenant à une fréquence de 14,2466 Hz, ce qui correspond à la fréquence de résonance du système linéaire sous-jaçent :

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = 14,2466 \text{ [Hz]}$$

La même analyse menée sur le modèle à plusieurs degrés de liberté fait apparaitre ce mode à une fréquence de 14,2440 Hz, soit quasiment identique au premier modèle. Les expressions utilisées pour la définition du module de Young ou du coefficient d'amortissement structural semblent donc correctes.

Excitation
Les modèles seront excités au moyen d'une force dirigée selon la direction verticale (Z). Nous savons que les effets non linéaires sont d'autant plus visibles au moment de la raisonnance. Cela peut s'expliquer par le fait que la résonance engendre des déplacements plus importants et les composantes non linéaires, ne sont plus négligeables face aux composantes linéaires. C'est pourquoi l'excitation correspond à un sinus d'une fréquence de 14 Hz et d'une amplitude maximale de $5 \,.\, 10^2$ N. Ces valeurs sont rappellées à la Table 1.2.

Pour le modèle à plusieurs degrés de liberté, la charge a été répartie sur l'ensemble de la face supérieure du cube d'acier. En effet, l'application de la force en un noeud – le point central de la face par exemple – impliquerait l'apparition d'une singularité dans le calcul des contraintes/déformations, pouvant mener des instabilités.

Paramètres d'intégration
Les paramètres d'intégration sont choisis par l'utilisateur au moyen de la carte `TSTEPNL`. Vu la complexité de l'algorithme d'intégration – en particulier, en raison des procédures ajoutées à l'algorithme de base –, les paramètres sont nombreux et nous n'avons pas entrepris de déterminer l'influence de chacun d'eux sur la réponse obtenue ou le temps de calcul. Le premier modèle correspond au cas classique de l'oscillateur de *Duffing*, beaucoup traité dans la littérature et pour lequel l'algorithme d'intégration directe de Newmark, tel qu'il est présenté à la Figure 1.1, a fait ses preuves. Sa simulation ne devrait, dès lors, poser aucun problème.

Dans le but d'établir une base commune entre les différents logiciels, nous désactiverons les procédures d'adaptation du pas de temps et n'introduiront aucun amortissement numérique. D'autre part, le schéma codé sous *MATLAB* ne faisant appel qu'à un critère de convergence basé sur l'équilibre des forces, nous ferons en sorte qu'il en soit de même dans *MSC.Nastran* et *SAMCEF Mecano*[1]. Les différents logiciels feront, dès lors, appel au même schéma d'intégration : la méthode directe de Newmark conservative.

La durée totale de la simulation sera de 2 secondes, ce qui correspond à 28 périodes d'excitation. Cette durée est suffisante pour faire disparaitre les effets transitoires et voir persister la réponse stationnaire. Concernant le pas de temps, il est d'usage d'imposer, au moins, entre 20 et 30 points d'évaluation par période, ce qui signifie, notre fréquence d'excitation étant égale à 14 Hz, un pas de temps d'environ $3 \,.\, 10^{-3}$ s. Une marge supplémentaire sera prise en prenant un pas de temps trois fois plus petit, soit : dt $= 10^{-3}$ s. Nous ferons varier ce pas de temps pour constater le phénomène de convergence. La tolérance liée au critère de convergence basé sur l'équilibre des forces sera, quant à elle, fixée à 10^{-7}. Les autres paramètres n'ont pas un effet directe sur la précision de la réponse calculée et seront laissés à leurs valeurs par défaut. La Table 1.3 synthétise les valeurs données aux paramètres d'intégration pour chaque logiciel.

1.4 Analyse des résultats

1.4.1 Premier modèle : un degré de liberté

Comme nous l'avons décrit, ce premier modèle – Figure 1.2a – se veut très basique et simpliste. Il correspond à un simple oscillateur 1 DDL sujet à une raideur cubique et un amortissement linéaire. Les caractéristiques sont énumérées à la Table 1.2.

1. *SAMCEF Mecano* ne permettant pas le choix des critères de convergence. Les tolérances des critères non désirés seront fixés à des valeurs relativement élevées, afin qu'elles ne conditionnent pas la convergence.

MATLAB	
dt [s]	10^{-3}
Critère	Equilibre des forces
Tolérance	10^{-7}

SAMCEF Mecano	
dt [s]	10^{-3}
Critère	Equilibre des forces – Variation du déplacement – Travail
Tolérances	10^{-7} – 10^{-3} – 10^{-3}

MCS.Nastran	
dt [s]	10^{-3}
Critère	Equilibre des forces
Tolérance	10^{-7}
Number of converged bisection between stiffness updates	1
Limit on number of iterations for each time step	20
Limit on the number of diverging conditions before assuming divergence	2
Maximum number of quasi-Newton correction vectors to be saved	0
Maximum number of line searches per iteration	0
Fraction of effective stress used to limit the subincrement size in the material routine	$0,2$
Maximum number of bisections allowed	0
Time step skip factor for automatic time step adjustment	0
Number of steps to obtain the dominant period response	40
Define bounds for maintainint the same time step for the stepping function during the adaptative process	$0,6$
Maximum ratio for the adjusted incremental time relative to the time step allowed	32
Tolerance on displacement increment below which a special provision is made for numerical stability	$0,1$
Maximum value of incremental rotation allowed per iteration to activate bisection	20

TABLE 1.3 – Paramètres d'intégration utilisés pour les différents logiciels. Les paramètres associés à *MSC.Nastran* n'ont pas été détaillés. Nous référons le lecteur intéressé au manuel d'utilisateur [4] – pp. 3398–3404 – pour les définitions précises de ces paramètres.

Les Figures 1.3a et 1.3b présentent les accélérations calculées par les différents logiciels pour le modèle à un seul degré de liberté illustré à la Figure 1.2a. Les paramètres utilisés sont ceux détaillés à la Table 1.3. On constate que les résultats correspondent parfaitement pour *MATLAB* et *SAMCEF Mecano*. Etonnamment, les accélérations obtenues avec *MSC.Nastran* présentent une amplitude légèrement moins élevée. Bien que la différence ne soit pas importante, cette observation est interpellante. En effet, le système simulé est simpliste et les algorithmes utilisés identiques. Les réponses devraient être quasiment les mêmes. Deux paramètres sont, donc, directement remis en question pour la simulation sous *MSC.Nastran* : le pas de temps utilisé et les tolérances admises.

Sur *SAMCEF Mecano* et *MATLAB*, la réduction du pas de temps ne modifie fondamentalement pas la réponse obtenue, comme en témoigne la Figure 1.4a. De plus, les logiciels mènent aux mêmes solutions. Nous prendrons donc, pour les simulations futures, les résultats calculés par *SAMCEF Mecano* comme référence. Sur *MSC.Nastran* – Figure 1.4b –, par contre, une erreur, qui semble systématique, apparait à mesure que le pas de temps est réduit. Le comportement observé est totalement perturbé et la qualité de la solution grandement dégradée.

Ni une diminution des tolérances, ni même un changement des critères de convergence ne semble résoudre ce problème. La Figure 1.5 présente les résultats obtenus en diminuant la tolérance associée au critère basé sur l'équilibre des forces à 10^{-8} – soit la limite avant que l'algorithme n'éprouve de réelles difficultés à converger. Sont aussi représentés les solutions calculées pour la combinaison de critère "UW" – critère sur le déplacement "U" et critère sur le travail "W" – qui avait été identifiée dans une précédente étude [6] comme la plus efficace. Ces nouveaux choix de paramètres ne modifient pas la réponse calculée. L'origine de l'erreur est donc autre.

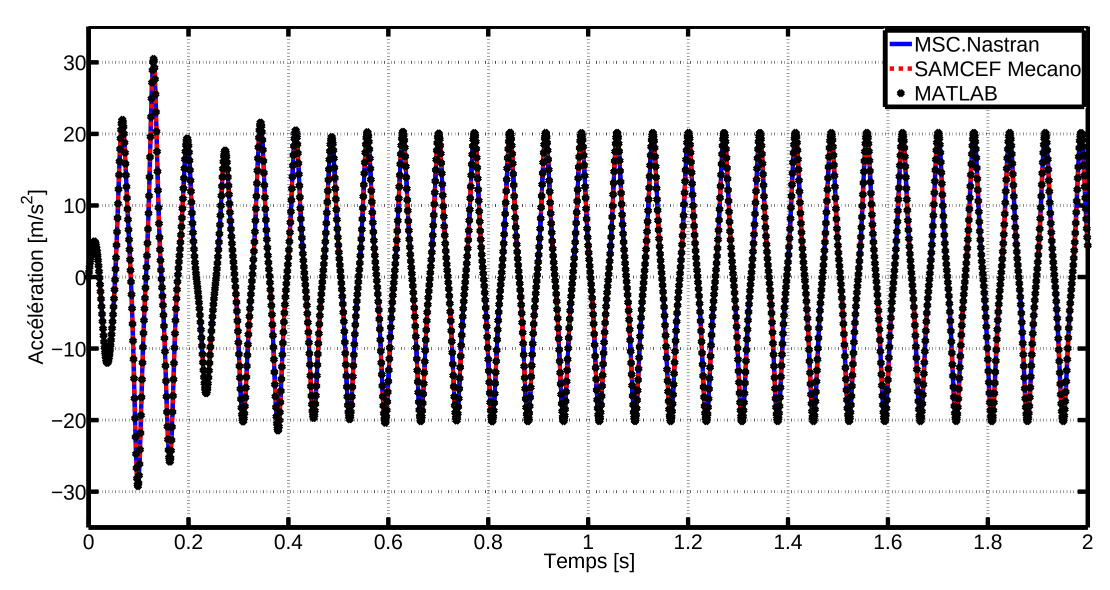
Etude du modèle linéaire sous-jaçent

De manière à s'assurer que ces erreurs ne sont pas dues à la présence de la non linéarité (méthode de mise à jour de la matrice de raideur tangente, ...), le système linéaire sous-jaçent, simplement obtenu en annulant le coefficient de raideur non linéaire K_3, a également été simulé. Le modèle se résume alors à un simple système masse-ressort amorti linéaire qu'il est possible de simuler au moyen des modules d'intégration temporelle linéaires. Pour *SAMCEF Mecano* et la procédure codée sous *MATLAB*, la solution a été calculée au moyen de la méthode d'intégration directe de Newmark pour les systèmes linéaires, telle qu'elle est décrite dans [12]. Vu les résultats obtenus pour le cas non linéaire précédent, le pas de temps choisi est de 10^{-4} s. Les critères de convergence et les tolérances n'ont pas été modifiées. Pour *MSC.Nastran*, la réponse a d'abord été calculée au moyen du module d'analyse temporelle non linéaire (SOL 129) pour un pas de temps fixé à 10^{-5} s – pour constater l'apparition des erreurs – et les critères de convergence et les tolérances associées suivants :

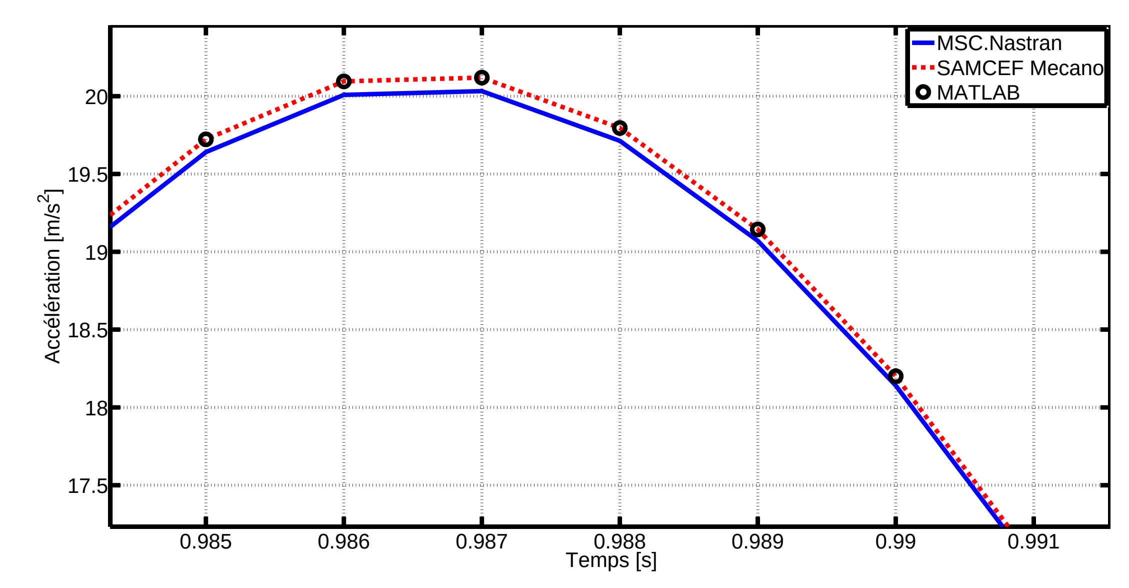
- Cas 1 : Critère basé sur l'équilibre des forces ("P") - Tolérance : 10^{-7}
- Cas 2 : Critère basé sur l'équilibre des forces ("P") - Tolérance : 10^{-8} [2]
- Cas 3 : Critère basé sur la variation de déplacement ("U") et Critère basé sur le travail ("W") - Tolérances respectives : 10^{-7} et 10^{-10}
- Cas 3 : Critère basé sur la variation de déplacement ("U") et Critère basé sur le travail ("W") - Tolérances respectives : 10^{-9} et 10^{-12} [1]

La solution sera également calculée grâce au module d'intégration réservé aux systèmes linéaires (SOL 109).

2. Il s'agit des plus petites tolérances accessibles sans être sujet à plusieurs problèmes de convergences.

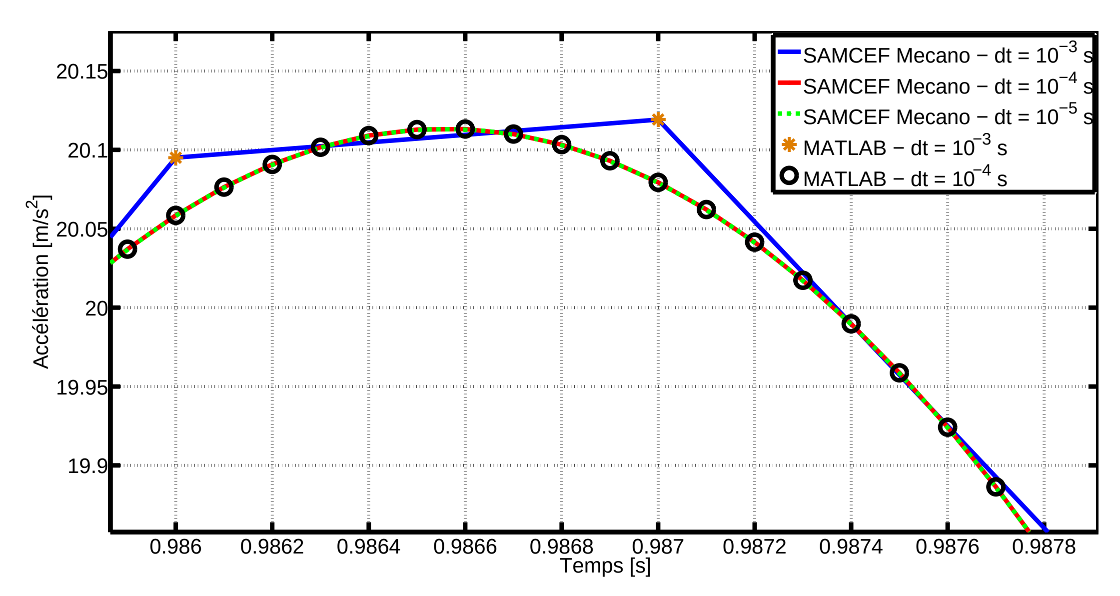


(a) Accélération calculée pour le modèle à 1 DDL – Figure 1.2a – par les différents logiciels (*MSC.Nastran*, *SAMCEF Mecano*, *MATLAB*) en utilisant un pas de temps égal à 10^{-3} s, le critère de convergence basé sur l'équilibre des forces et une tolérance fixée à 10^{-7}. L'ensemble des paramètres d'intégration sont rappelés à la Table 1.3.

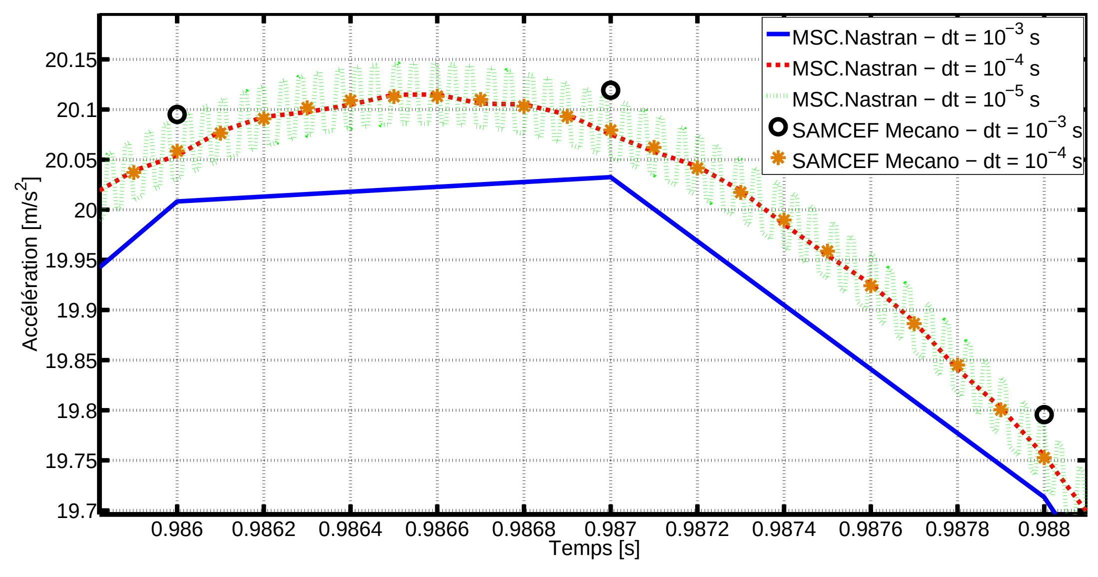


(b) Zoom au niveau d'un pic d'accélération de la Figure ci-dessus.

FIGURE 1.3 – Premiers résultats obtenus.



(a) Effet d'une réduction du pas de temps sur l'accélération calculée pour le modèle à 1 DDL – Figure 1.2a – par les logiciels *SAMCEF Mecano* et *MATLAB*. Le critère de convergence utilisé est celui basé sur l'équilibre des forces et la tolérance associée a été fixée à 10^{-7}. L'ensemble des paramètres d'intégration sont rappelés à la Table 1.3.



(b) Effet d'une réduction du pas de temps sur l'accélération calculée pour le modèle à 1 DDL – Figure 1.2a – par *MSC.Nastran*. Le critère de convergence utilisé est celui basé sur l'équilibre des forces et la tolérance associée a été fixée à 10^{-7}. L'ensemble des paramètres d'intégration sont rappelés à la Table 1.3.

FIGURE 1.4 – Réduction du pas de temps.

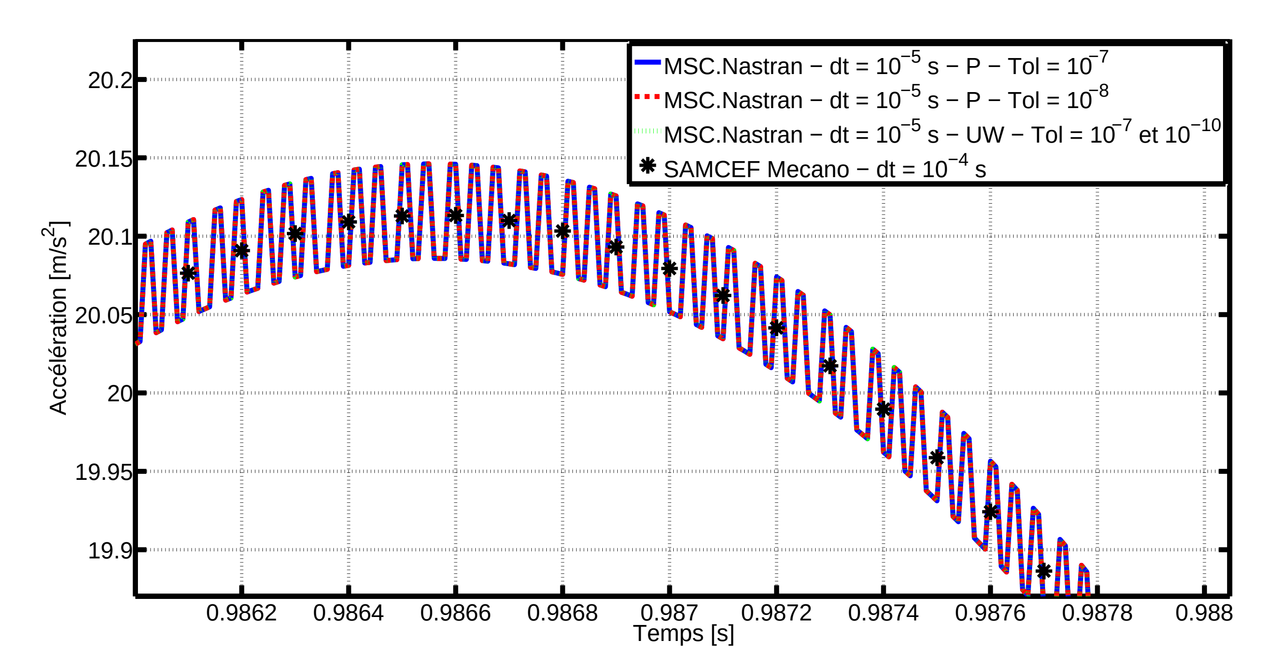


FIGURE 1.5 – Effet du changement des critères de convergences utilisés et des tolérances fixées sur l'accélération calculée pour le modèle à 1 DDL – Figure 1.2a – par *MSC.Nastran*. Le pas de temps est égal à 10^{-5} s. Les autres paramètres d'intégration utilisés sont ceux décrits à la Table 1.3.

Méthodes d'intégration temporelle linéaires

Très brièvement, le module d'analyse temporelle linéaire de *MSC.Nastran*, SOL 109, fait appel à la méthode linéaire d'intégration de Newmark à trois points, similaire à la méthode décrite au paragraphe 1.2.1. En se basant sur la méthode de la différence centrée :

$$\dot{\mathbf{q}}_n = \frac{1}{2\Delta t}\left(\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_{n-1}\right)$$
$$\ddot{\mathbf{q}}_n = \frac{1}{\Delta t^2}\left(\mathbf{q}_{n+1} - 2\mathbf{q}_n + \mathbf{q}_{n-1}\right)$$

et en moyennant le déplacement et la force appliquée sur trois pas de temps consécutifs, on peut réécrire l'équation du mouvement sous la forme :

$$\frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2}\left(\mathbf{q}_{n+1} - 2\mathbf{q}_n + \mathbf{q}_{n-1}\right) + \frac{\mathbf{C}}{2\Delta t}\left(\mathbf{q}_{n+1} + \mathbf{q}_{n-1}\right) + \frac{\mathbf{K}}{3}\left(\mathbf{q}_{n+1} + \mathbf{q}_n + \mathbf{q}_{n-1}\right) = \frac{1}{3}\left(\mathbf{P}_{n+1} + \mathbf{P}_n + \mathbf{P}_{n-1}\right)$$

Soit, en réorganisant les termes :

$$\left(\frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} + \frac{\mathbf{C}}{2\Delta t} + \frac{\mathbf{K}}{3}\right)\mathbf{q}_{n+1} = \frac{1}{3}\left(\mathbf{P}_{n+1} + \mathbf{P}_n + \mathbf{P}_{n-1}\right) + \left(\frac{2\mathbf{M}}{\Delta t^2} - \frac{\mathbf{K}}{3}\right)\mathbf{q}_n + \left(-\frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} + \frac{\mathbf{C}}{2\Delta t} - \frac{\mathbf{K}}{3}\right)\mathbf{q}_{n-1}$$

L'état du système au temps $n+1$ est, ensuite, déterminant en inversant la matrice $\left(\frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} + \frac{\mathbf{C}}{2\Delta t} + \frac{\mathbf{K}}{3}\right)$.

Enfin, le système étant simple et linéaire, sa réponse pourra être calculée analytiquement et, ainsi, les solutions obtenues avec les différents logiciels pourront être confirmées ou infirmées. La Figure 1.6 compare les résulats obtenus avec le module SOL 129 pour les différents critères. On peut remarquer, tout d'abord, que la réponse calculée par *SAMCEF Mecano* est identique à la solution analytique. Les accélérations calculées par *MSC.Nastran*, par contre, témoignent des mêmes phénomènes que ceux observés précédemment aux Figures 1.4b et 1.5. Ces erreurs ne sont donc pas dues à la présence d'une non linéarité.

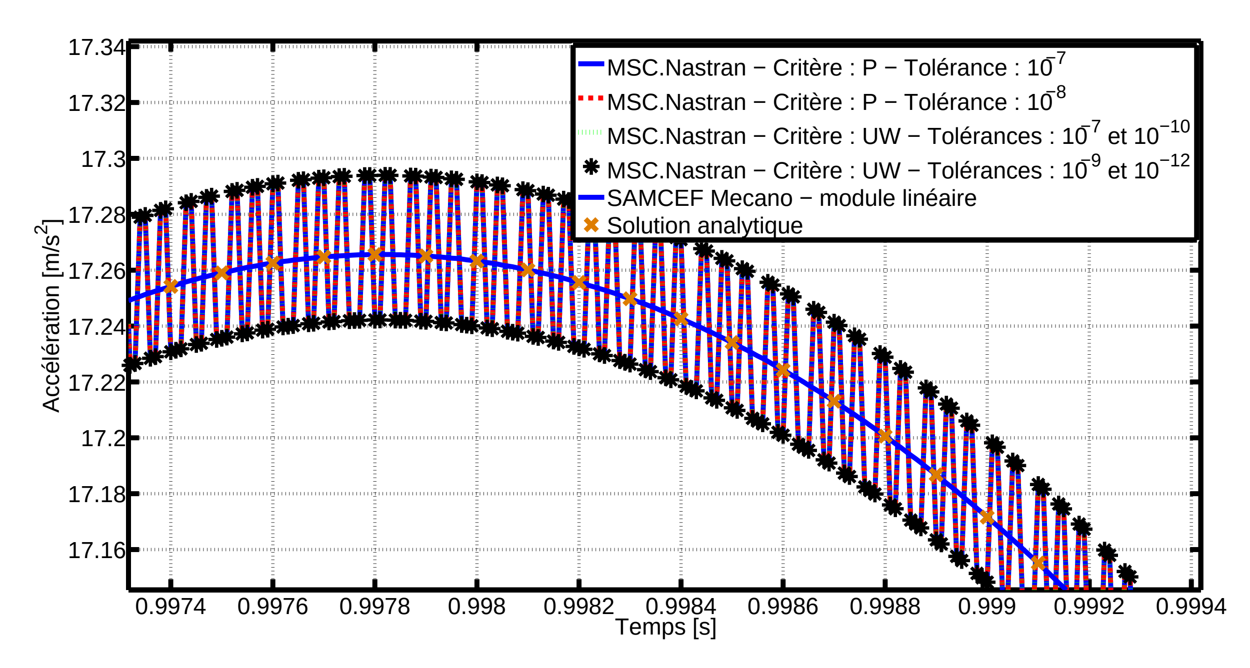


FIGURE 1.6 – Accélération calculée pour le modèle linéaire sous-jaçent au système à 1 DDL initial – Figure 1.2a – par le module d'analyse non linéaire, SOL 129, de *MSC.Nastran* et par l'algorithme d'intégration linéaire de *SAMCEF Mecano* en utilisant un pas de temps égal à 10^{-5} s. La solution analytique du système est également représentée. Pour *MSC.Nastran*, le critère de convergence utilisé est celui basé sur l'équilibre des forces et la tolérance a été fixée à 10^{-7}.

Comme l'illustre la Figure 1.7, le module d'analyse temporelle linéaire, SOL 109, mène, quant à lui, à une réponse correcte et précise, parfaitement en accord avec la solution analytique ou *SAMCEF Mecano*. Cette observation nous mène à penser que ces erreurs trouvent leur origine dans l'algorithme utilisé par le module d'analyse non linéaire, SOL 129, lui-même. En effet, malgré un grand nombre de pistes envisagées, nous n'avons pas été capable de les faire disparaitre. Il est, cependant, à noter que ces erreurs surviennent pour des pas de temps très faibles par rapport à la fréquence du premier mode – rappelons qu'en pratique, on impose généralement un pas de temps entre 20 et 30 fois inférieur à la fréquence à observer [3] – et ne sont donc pas visibles pour pour un choix raisonnable.

L'assistance technique d'*MSC* n'a pas pu, non plus, apporter de solution à ce problème, mais a attesté que ce dernier n'était pas dû à un mauvais choix de paramètres d'intégration. L'unique option viable est de se tourner vers d'autres modules, tels que l'un des nouveaux modules d'intégration implicite non linéaire, la SOL 400 ou la SOL 600. Dans le cadre de cette étude, la SOL 600 a été écartée, car elle a été développée pour être pleinement compatible avec un autre logiciel basé sur *MSC.Nastran*, *MSC.Marc*. Dès lors, les cartes utilisées par la SOL 600 – qu'il s'agisse des cartes destinées à la définition du modèle ou de celles utilisées pour définir les paramètres de calculs – sont particulières et ne sont pas compatibles avec les autres modules d'analyses. Pour plus de facilité, nous nous tournerons, donc, vers la SOL 400, qui présente, elle, l'avantage d'utiliser l'ensemble des cartes classiques de *MSC.Nastran*. Ce nouveau module est destiné, à termes, à regrouper et à remplacer une large gamme de modules d'analyses, en particulier, ceux d'analyses temporelles ou statiques, qu'ils soient structurels (SOL 106, SOL 109, SOL 129) ou thermiques (SOL 153, SOL 159). Il est destiné à pouvoir apporter des solutions à tous types de cas non linéaires (non linéarité matérielles, géométriques, contacts, flambement, ...), mais aussi à pouvoir traiter des problèmes multi-physiques.

Pour les simulations temporelles, la SOL 400 propose à l'utilisateur de nouvelles stratégies de mise à jour de la matrice de raideur tangente, mais aussi de nouveaux algorithmes d'intégration. *MacNeal-*

3. Dans le cas étudié ici, cela reviendrait à imposer $dt = 3 \cdot 10^{-4}$ s.

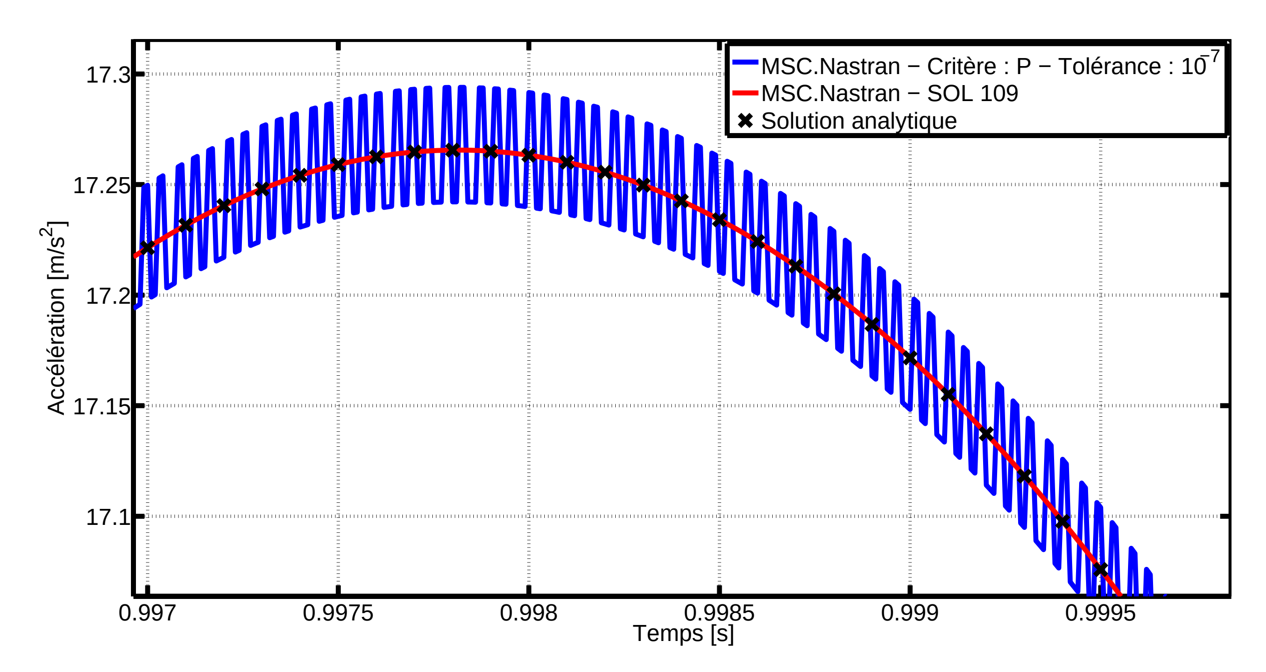


Figure 1.7 – Accélération calculée pour le modèle linéaire sous-jaçent au système à 1 DDL initial – Figure 1.2a – par le module d'analyse non linéaire, SOL 129, et le module d'analyse linéaire, SOL 109, de *MSC.Nastran* en utilisant un pas de temps égal à 10^{-5} s. Les résultats sont comparés à la solution analytique disponible. Pour la SOL 129, le critère de convergence utilisé est celui basé sur l'équilibre des forces et la tolérance a été fixée à 10^{-7}.

Schwendler Corportation se tourne, désormais, vers la méthode α-généralisée, que nous avons décrite à la section 1.2.2. Il est en effet désormais possible de définir les valeurs des deux coefficients de dissipation α_M et α_F au moyen des paramètres `NDAMPM` et `NDAMP` respectivement. Par défaut, la méthode de Newmark classique est utilisée pour les cas linéaires, la méthode d'Hilber-Hughes-Taylor pour les problèmes non linéaires et la méthode de Wood-Bossak-Zienkiewicz pour les problèmes impliquant du contact. Toutefois, ce choix est laissé à l'utilisateur. La SOL 400 intègre également deux nouvelles options "V" et "N" concernant le critère basé sur la variation de déplacement ("U") et celui basé sur l'équilibre des forces ("P"). La première impose que la vérification de convergence soit effectuée uniquement sur base de la plus grande composante des vecteurs comparés – par exemple, le vecteur des déplacements si "U" est le critère sélectionné –, tandis que la seconde vérifie la convergence sur base de la longueur (au sens de la racine carrée de la somme des composantes au carré) des vecteurs. Pour toute information supplémentaire, nous référons le lecteur intéressé au définition de la carte `TSTEPNL` et des paramètres `NDAMPM` et `NDAMP` du *Nastran Quick Reference Guide* [4].

Dans cette étude, les paramètres d'intégration choisi pour le module SOL 400 sont identiques à ceux utilisés pour la SOL 129, à savoir :

- Stratégie de mise à jour de la matrice de raideur tangente identique ;
- Plusieurs pas de temps étudiés : 10^{-3} s, 10^{-4} s et 10^{-5} s ;
- Trois cas ont été traités :
  - Cas 1 : Critère basé sur l'équilibre des forces "P" - Tolérance associée : 10^{-7} ;
  - Cas 2 : Critère basé sur la variation de déplacement "U" et critère basé sur le travail "W" - Tolérances respectives : 10^{-7} et 10^{-10} ;
  - Cas 3 : Critère basé sur la variation de déplacement "U" - Tolérance associée : 10^{-7}

La Figure 1.8 montre les accélérations obtenues avec la SOL 400 pour les trois cas énoncés ci-dessus et les compare avec, d'une part, la réponse obtenue avec la SOL 129 et, d'autre part, la solution analytique. On remarque immédiatement que, pour le système linéaire sous-jaçent, les erreurs parasites présentes avec

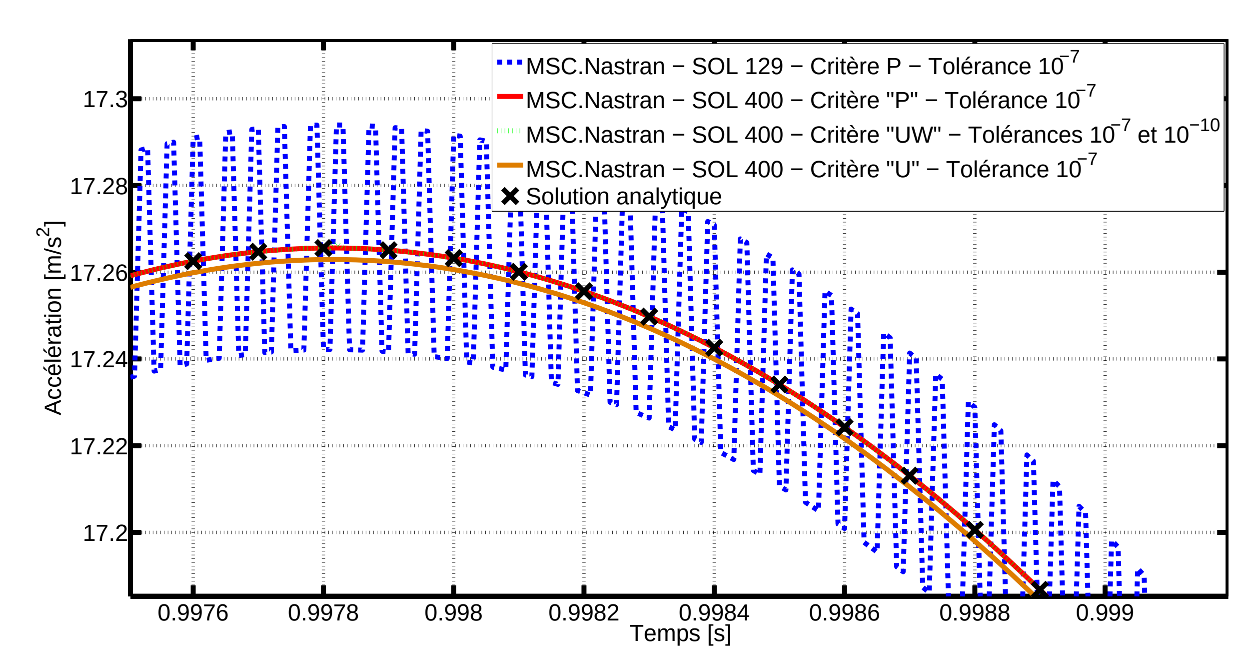


FIGURE 1.8 – Accélération calculée pour le modèle linéaire sous-jaçent au système à 1 DDL initial – Figure 1.2a – par le nouveau module d'analyse non linéaire, SOL 400, de *MSC.Nastran* en utilisant un pas de temps égal à 10^{-5} s, pour différents critères de convergences. Les résultats sont comparés à la solution analytique disponible, ainsi qu'à la réponse calculée par la SOL 129 avec un pas de temps identique. Pour rappel, le critère "P" est celui basé sur l'équilibre des forces, "U" sur la variation de déplacement et "W" sur le travail.

la SOL 129, ont disparu et que la réponse calculée par la SOL 400 correspond quasiment parfaitement à la solution analytique. Une sensible erreur est cependant visible pour le critère basé sur l'équilibre des forces, toutefois, celle-ci reste acceptable.

A propos des critères de convergence, nous avions précédemment souligné que le critère basé sur le déplacement "U", vu sa définition, requiérait au minimum deux itérations par pas de temps. Dans la SOL 400, par contre, si ce critère est utilisé en combinaison avec l'un des deux autres critères "P" ou "W", le test de convergence ne tiendra pas compte du critère "U" lors de la première itération. Ce qui implique qu'au temps n, une solution, satisfaisant le critère "P" et/ou – en fonction du choix de l'utilisateur – "W" à la première itération de correction, pourra être retenue même si elle ne satisfait pas le critère "U". A la seconde itération, par contre, la solution devra impérativement satisfaire tous les critères demandés par l'utilisateur. C'est pourquoi, si le critère de convergence "U" est désiré par l'utilisateur, il est préférable de ne le combiner avec aucun autre critère.

Etude du système non linéaire

Une comparaison des accélérations obtenues au moyen de la SOL 129, SOL 400 et de *SAMCEF Mecano* pour le système initial non linéaire est présentée à la Figure 1.9. Deux critères ont été testés : le critère basé sur l'équilibre des forces et celui défini à partir de la variation du déplacement calculé. Comme pour les simulations précédentes, les tolérances ont été fixées à 10^{-7}. On remarque immédiatement que la solution proposée par SOL 400, comme pour le système linéaire, n'est pas entachée des erreurs présentes avec la SOL 129. En outre, elle est en concordance quasiment parfaite avec la réponse calculée par *SAMCEF Mecano*. Enfin, comme on peut le constater grâce à la Figure 1.10, la SOL 400 mène a des résultats plus précis que son prédécesseur pour un pas de temps plus raisonnable, égal à 10^{-3} s, et des critères de convergence identiques.

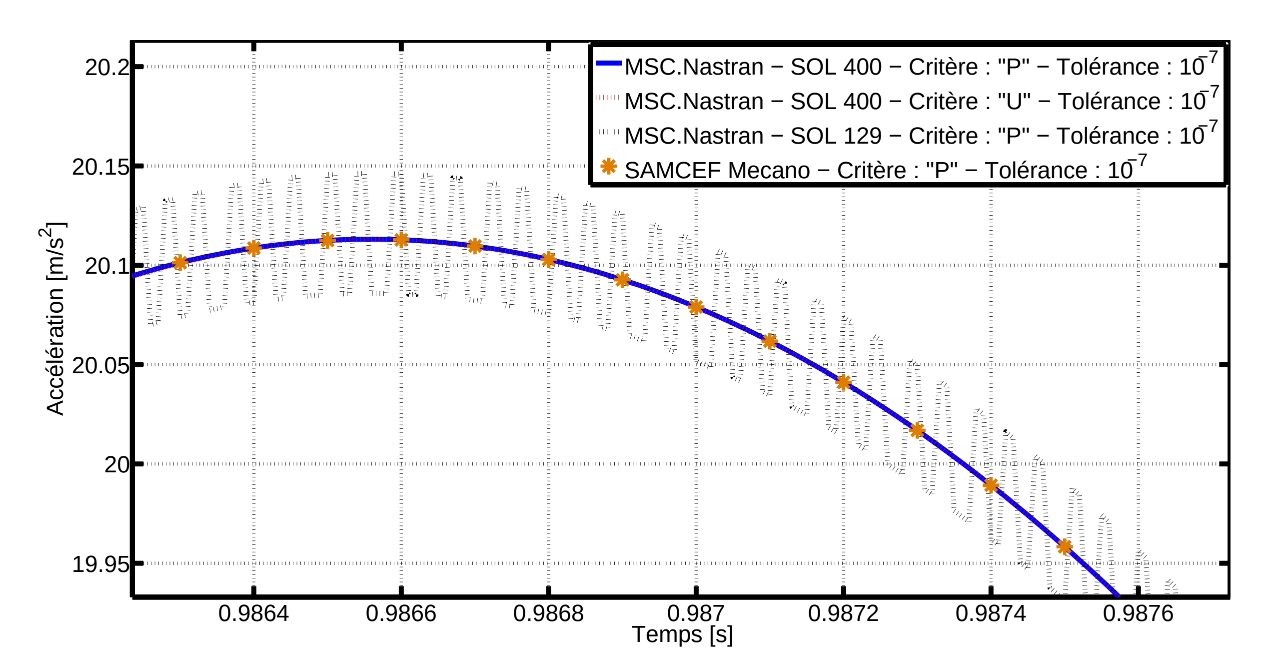


FIGURE 1.9 – Accélération calculée pour le modèle non linéaire à 1 DDL – Figure 1.2a – par le nouveau module d'analyse non linéaire, SOL 400, de *MSC.Nastran* en utilisant un pas de temps égal à 10^{-5} s, pour différents critères de convergences. Les résultats sont comparés à la solution de référence obtenue avec *SAMCEF Mecano*, ainsi qu'à la réponse précédemment calculée par la SOL 129 avec un pas de temps identique. Pour rappel, le critère "P" est celui basé sur l'équilibre des forces et "U" sur la variation de déplacement. De manière à rendre la Figure plus lisible, seul un point sur dix de l'accélération calculée par *SAMCEF Mecano* ont été représentés.

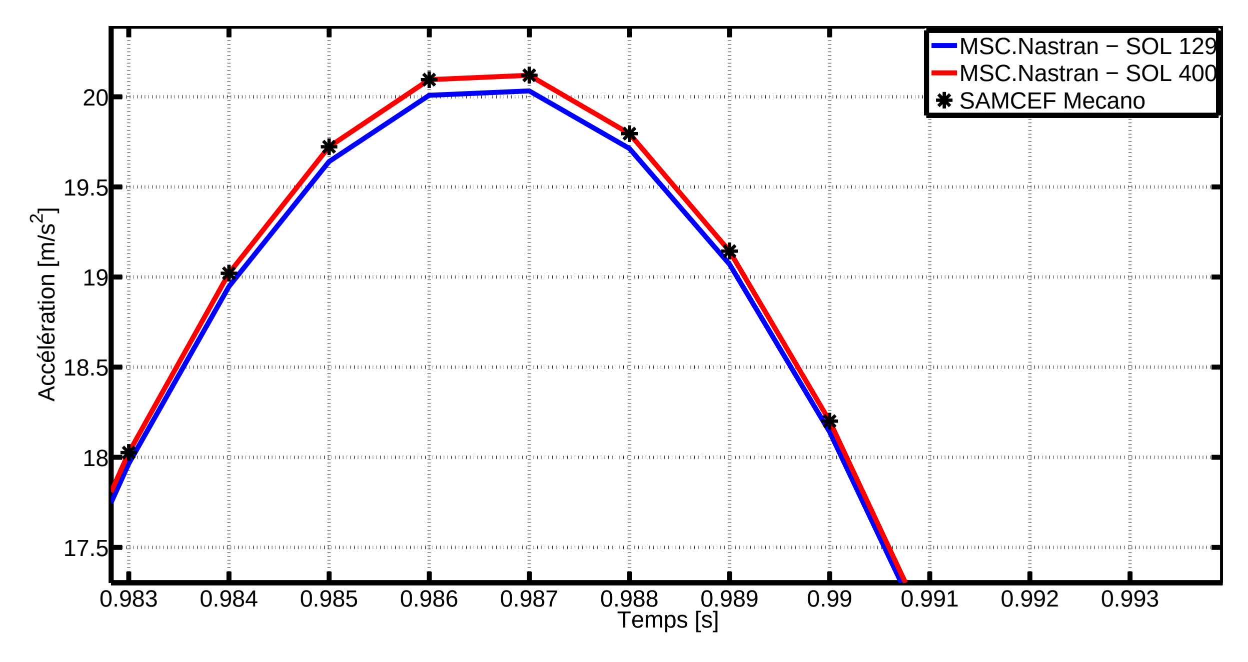


FIGURE 1.10 – Comparaison des accélérations calculées pour le modèle non linéaire à 1 DDL – Figure 1.2a – par le nouveau module d'analyse non linéaire, SOL 400, et son prédécesseur, SOL 129 de *MSC.Nastran*. Le pas de temps, le critère de convergence et la tolérance sont ceux qui avaient été choisis au début de ce chapitre, à savoir : $dt = 10^{-3}$ s, critère de convergence basé sur l'équilibre des forces et tolérance fixée à 10^{-7}. Les résultats sont comparés à la solution de référence obtenue avec *SAMCEF Mecano* pour des paramètres d'intégration identiques.

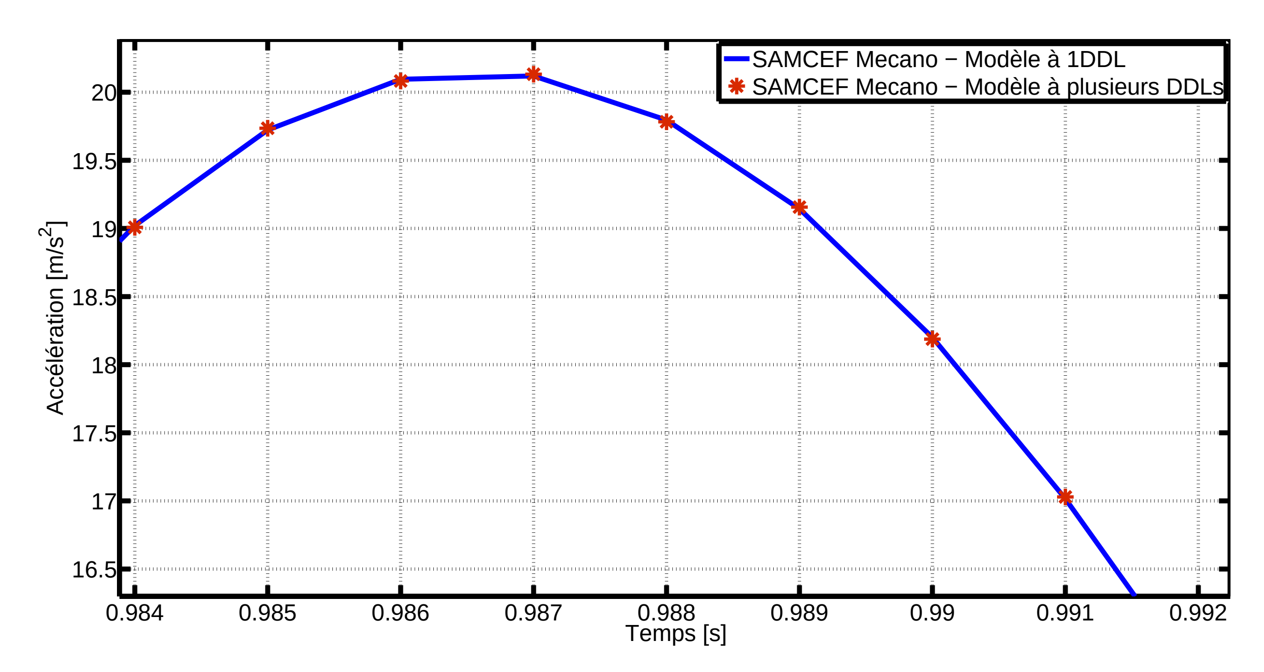


FIGURE 1.11 – Comparaison des accélérations calculées pour le premier modèle à 1DDL et pour le second modèle à plusieurs degrés de liberté par *SAMCEF Mecano*. Le pas de temps est fixé à 10^{-3} s. Les critères de convergence et les tolérances sont ceux qui avaient été choisis au début de ce chapitre, à savoir : $dt = 10^{-3}$ s, critère de convergence basé sur l'équilibre des forces et tolérance fixée à 10^{-7}.

1.4.2 Deuxième modèle : plusieurs degrés de liberté

Le second modèle – Figure 1.2b – étudié apporte un supplément de réalisme, mais aussi de complexité au modèle à un degré de liberté. Il ne cherche pas pour autant à représenter un cas réel. En effet, les caractéristiques du modèle - module de Young, coefficient d'amortissement structurel, coefficient de Poisson, ... – ont été adaptés de manière à assurer une correspondance parfaite avec le modèle à un degré de liberté. Ils sont énumérés à la Table 1.2. Sur base de l'expérience acquise en traitant le cas précédent, les analyses seront également menées en faisant appel au nouveau module d'intégration implicite de *MSC.Nastran*, SOL 400.

La Figure 1.11 a pour but de démontrer l'équivalence des deux modèles en comparant les accélérations calculées par *SAMCEF Mecano* pour chacun d'eux. Les deux solutions sont quasiment identiques, ce qui nous montre que les caractéristiques du système ont bien été évaluées et que les modèles sont bien comparables.

Les accélérations calculées au moyen des SOL 129 et SOL 400 pour le critère basé sur l'équilibre des forces "P" sont présentées à la Figure 1.12. On constate une erreur d'amplitude, ainsi qu'une erreur de phase par rapport à la solution donnée par *SAMCEF Mecano*. Les réponses ne sont plus périodiques et quelques soubresauts peuvent être remarqués pour la SOL 129.

Ces phénomènes sont identiques à ceux observés pour une raideur quadratique dans le rapport du Lot 3.1 de l'étude R&T *DyNoLi* menée par le *C.N.E.S.* et *EADS-Astrium* [6]. Dans ce document, les auteurs remarquent la présence d'un déphasage et d'une erreur d'amplitude sur la réponse observée. Il est également constaté que cette erreur varie en fonction du pas de temps utilisé et est présente, même sur des points éloignés de la non linéarité. D'autres comportements similaires avaient été repérés dans le Lot 2.2 [34]. A l'époque, aucune explication, ni solution n'avait été trouvée.

Dans nos recherches, nous avons pu observer la forte dépendance de ces erreurs en fonction d'un grand nombre de paramètres. La Figure 1.13 présente les réponses obtenues pour différents pas de temps, pour différentes tolérances et pour les deux modules d'intégration implicite SOL 129 et SOL 400. On remarque

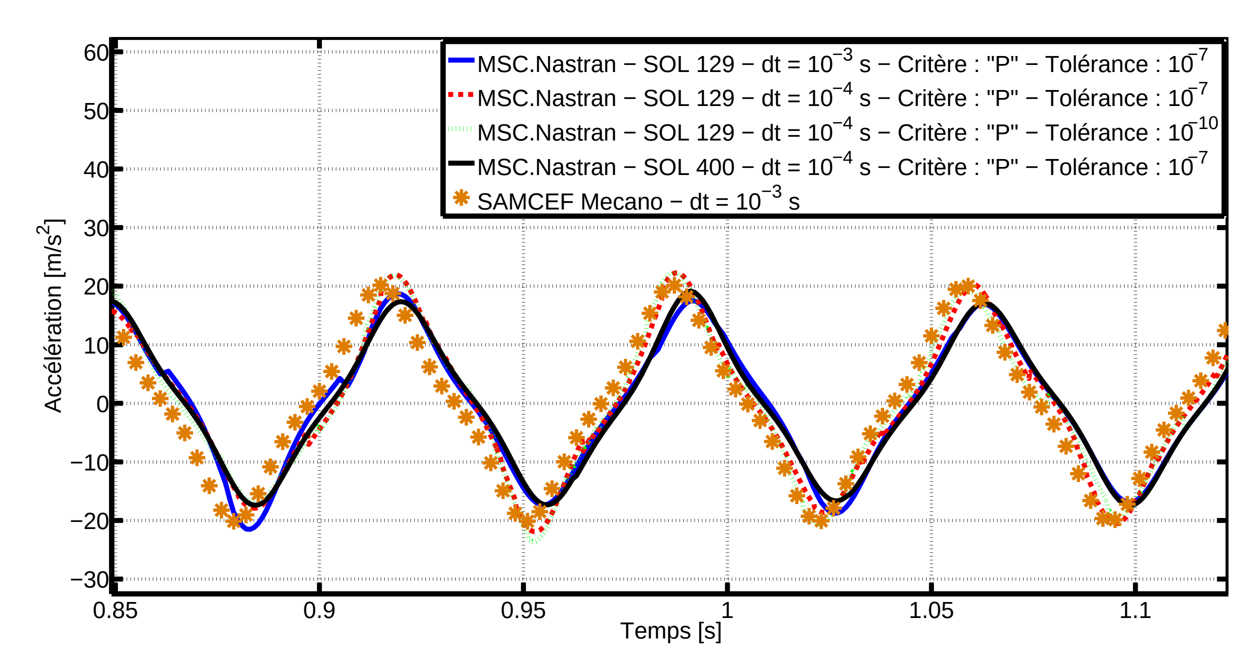


Figure 1.12 – Accélérations calculées pour le second modèle à plusieurs degrés de liberté – Figure 1.2b – par la SOL 129 et la SOL 400 de *MSC.Nastran*. Le pas de temps est fixé à 10^{-3} s et le critère de convergence est celui basé sur l'équilibre des forces. La tolérance imposée est, quant à elle, égale à 10^{-7} s. Les solutions sont, comme toujours, comparées à la réponse calculée par *SAMCEF Mecano*.

que ni une diminution du pas de temps, ni une réduction des tolérances ne permet de s'approcher de la solution de référence donnée par *SAMCEF Mecano*. D'une manière générale, lors de nos essais, il était très difficile de prédire l'effet d'une modification de un ou plusieurs paramètres d'intégration sur la solution obtenue. Aucun phénomène de convergence vers une unique réponse n'était visible. Outre le pas de temps et les tolérances, les précisions de définition du signal d'excitation et de la loi matériau, la stratégie de mise à jour de la matrice de raideur tangente et les critères de convergence choisis ont une influence. Comme le montre la Figure 1.14, l'unique solution viable que nous avons pu mettre en évidence consiste à n'activer que – et seulement que – le critère "U" basé sur la variation de déplacement et de choisir la méthode de mise à jour de la matrice de raideur tangente `ADAPT`, identique à celle utilisée dans la SOL 129. Le service technique de *MSC.Nastran* n'a pas pu nous éclairer à ce sujet et les observations ont été relayées aux programmeurs.

A l'heure où ces lignes sont écrites, d'autres membres du Service de Structure et Mécanique du *C.N.E.S.* ont constaté le comportement hasardeux de l'algorithme d'intégration temporelle non linéaire utilisé par *MSC.Nastran*. Le besoin d'une méthode plus fiable a, quant à lui, été souligné et est actuellement à l'étude.

1.5 Conclusion

Au long de ce premier chapitre, nous avons pris en main les modules d'intégration implicite proposés par *MSC.Nastran*, la SOL 129 et la SOL 400. Ceux-ci ont été appliqués à deux modèles non linéaire équivalents. Le premier consistait en un simple oscillateur à un degré de liberté, tandis que le second, une complexification du premier, était constitué de deux cubes discrétisés en huit éléments hexaédriques chacun. La non linéarité considérée était une raideur cubique. Ces deux systèmes n'aspiraient pas à être représentatifs d'un cas réel, toutefois, des parallélismes peuvent être facilement réalisés.

Les paramètres d'intégration initiaux avaient été choisis afin d'établir une base commune entre les différents logiciels utilisés – en effet, nous devions garantir l'utilisation d'un même pas de temps, des

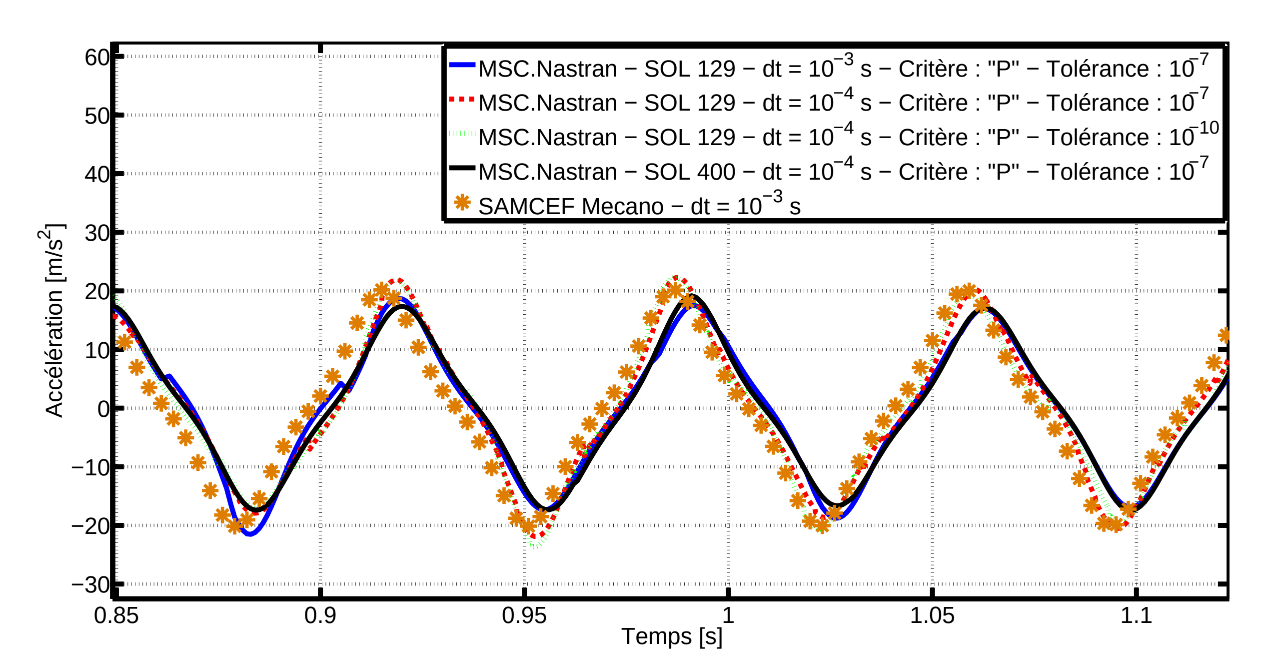


FIGURE 1.13 – Accélérations calculées pour le second modèle à plusieurs degrés de liberté – Figure 1.2b – par la SOL 129 et la SOL 400 de *MSC.Nastran* pour différents pas de temps et différentes tolérance. Le critère de convergence est celui basé sur l'équilibre des forces "P". Les solutions sont comparées à la réponse de référence calculée par *SAMCEF Mecano*.

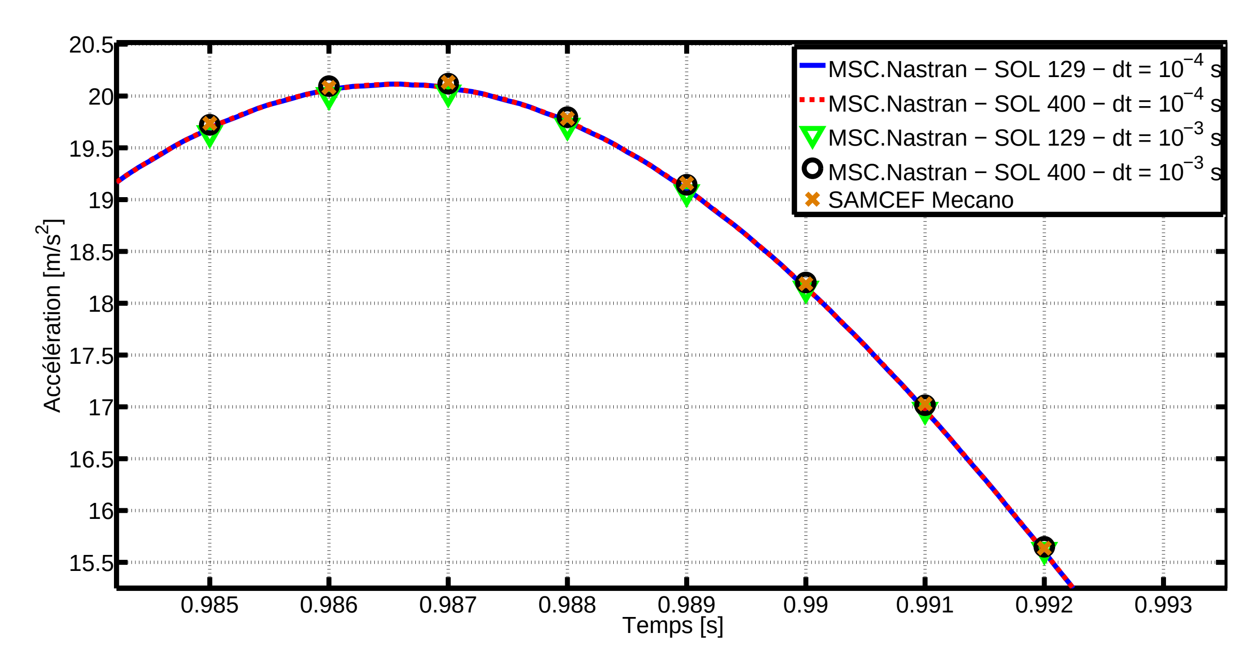


FIGURE 1.14 – Accélérations calculées pour le second modèle à plusieurs degrés de liberté – Figure 1.2b – par la SOL 129 et la SOL 400 de *MSC.Nastran* en utilisant le critère basé sur la variation de déplacement et une tolérance égale à 10^{-7} s. Deux pas de temps ont été envisagés : 10^{-3} s et 10^{-4} s. Les solutions sont comparées à la réponse de référence calculée par *SAMCEF Mecano*.

mêmes critères et des mêmes tolérances.

De manière à confirmer les résultats obtenus, les systèmes ont également été simulés au moyen de *SAMCEF Mecano* et de l'algorithme d'intégration directe Newmark codé sous *MATLAB*. Les réponses calculées par ces deux logiciels menant, quasiment parfaitment, aux mêmes résultats, la solution donnée par *SAMCEF Mecano* a été prise comme référence pour cette étude.

Lors des simulations du premier modèle, nous avons pu constater que la SOL 129 avait tendance à introduire des erreurs au caractère assez systématique d'autant plus importantes que le pas de temps était réduit. Elles n'ont pu être corrigées qu'en utilisant la nouvelle version du module d'analyse temporelle, la SOL 400. D'une manière générale, nous avons remarqué que ce nouveau module permettait d'obtenir, à critères de convergence, tolérances et pas de temps identiques, une meilleure précision que la SOL 129.

Le second modèle, quant à lui, nous a permis de mettre en évidence la grande sensibilité des algorithmes utilisés par *MSC.Nastran* – qu'il s'agisse de la SOL 129 ou de la SOL 400 – par rapport au choix des paramètres d'intégration. En effet, comme il l'a été précédemment observé lors de l'étude R&T *DyNoLi* [6, 34], une différence d'amplitude, mais aussi un certain déphasage par rapport à la solution de référence étaient présents. L'unique solution trouvée pour contrer ce problème consiste à ne choisir que le critère basé sur la variation de déplacement. Seul ce dernier semble mener à une solution correcte. Pour les autres critères, ni une diminution du pas de temps ou des tolérances imposées ne mènent à une réponse en accord avec la solution calculée par *SAMCEF Mecano*.

Ce premier chapitre nous a donc permis, tout d'abord, de se familiariser avec *MSC.Nastran* et ses modules d'analyse temporelle. Nous avons pu cerner les fondements des méthodes appliquées et souligner l'importance et la signification de certains paramètres et de certaines cartes. En outre, en vue des futures simulations, il a été possible de déterminer un set de paramètres d'intégration menant, dans ces premiers cas d'essais, à une réponse correcte. L'utilisation du nouveau module d'intégration implicite, SOL 400, est fortement conseillé, d'abord parce qu'il n'est pas sujet aux erreurs systématiques citées ci-dessus, ensuite, car, à paramètres identiques, il conduit à des résultats plus précis.

Chapitre 2

Problématique et solution envisagée

2.1 Introduction

Dans ce second chapitre, nous décrirons la structure traitée : l'horloge atomique *PHARAO*. Après quelques généralités, nous nous plongerons au coeur même du comportement problématique à étudier. Nous décrirons, ensuite, brièvement les modèles éléments finis disponibles, et énoncerons les informations dont nous disposons. Sur base de celles-ci, nous décrirons, sans entrer dans trop de détails, le plan de travail ainsi que les objectifs fixés. Nous présenterons également la méthode de la *Restoring Force Surface* mise à l'épreuve ici et soulignerons ses exigences, notamment, concernant l'excitation appliquée.

2.2 *PHARAO*

PHARAO [1], pour *Projet d'Horloge Atomique par Refroidissement d'Atome en Orbite*, est un programme mené par le *C.N.E.S.* depuis 1999 dans le cadre de la mission européenne *ACES – Atomic Clock Ensemble in Space* – de l'*European Space Agency. ACES* est une charge utile destinée à être fixée en position nadir à à l'extérieur du module *Columbus* de la *Station Spatiale Internationale* – Figure 2.1. Elle sera composée d'instruments complexes à la pointe du progrès et combine deux éléments principaux : l'horloge atomique *PHARAO*, développée par le *C.N.E.S.*, ainsi que du *Maser à Hydrogène Spatial – SHM* pour *Space Hydrogen Maser* –, développé en Suisse par la société *Spectra Time. ACES* a pour but d'établir un temps de référence stable et précis pour permettre des comparaisons avec le sol. La combinaison des deux instruments *SHM* et *PHARAO* permet, en effet, de garantir une très haute précision de mesure du temps sur une large gamme de durée, le *SHM* étant très stable sur des durées de plusieurs heures, alors que l'horloge atomique présente une stabilité exceptionnelle sur le long terme – de 10000 secondes à 10 jours. La Figure 2.2 présente les stabilités de différentes horloges.

La seconde est définie en 1967 comme la durée de 9.192.631.770 périodes de radiation correspondant à la transition entre deux niveaux de l'état de base de l'atome de Césium-133. L'horloge atomique *PHARAO* se base précisément sur cette définition. En effet, elle utilise des atomes de césium refroidis à une température de 1μK envoyés à travers un champ micro-onde alimenté par un signal à environ 9,192 GHz, avec lequel ils vont intéragir. Ils seront, au long de leur passage, sélectionnés sur base de leurs phases quantiques. Les transitions subies par ces atomes, ensuite, sont observées au moyen de faisceaux laser. Ce cycle est répété pour en extraire les franges, dites franges de Ramsey. Celles-ci seront analysées pour en extraire la durée d'une seconde. L'ensemble de cette procédure est schématisé à la Figure 2.3. L'utilisation de cette horloge en micropesanteur est supposé permettre de gagner un ordre de grandeur de précision par rapport à sa mise en oeuvre sur Terre, soit une précision égale à 10^{-16}, ce qui correspond à une erreur d'une seconde sur une durée de 300 millions d'années. En effet, la micropesanteur permet de mieux contrôler la vitesse des atomes lors de leur passage à travers le champ micro-onde, mais également d'augmenter la durée d'interaction avec ce dernier.

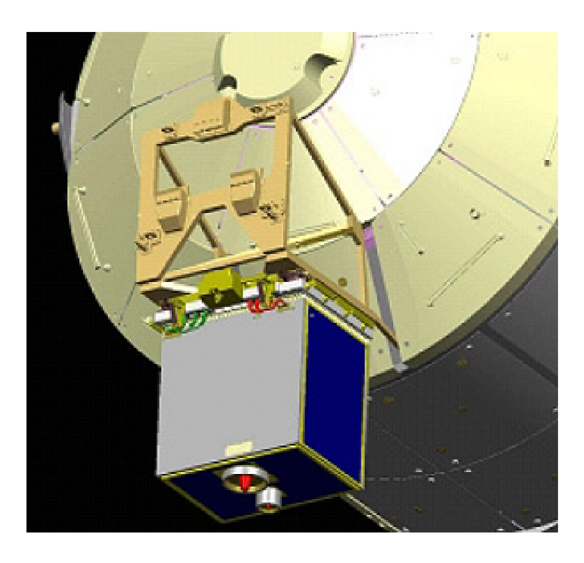


FIGURE 2.1 – Représentation de la charge utile *ACES* fixée à l'extérieure du module *Columbus* de la *Station Spatiale Internationale*. Source : `http://smsc.cnes.fr/PHARAO/Fr/GP_platform_aces.htm`.

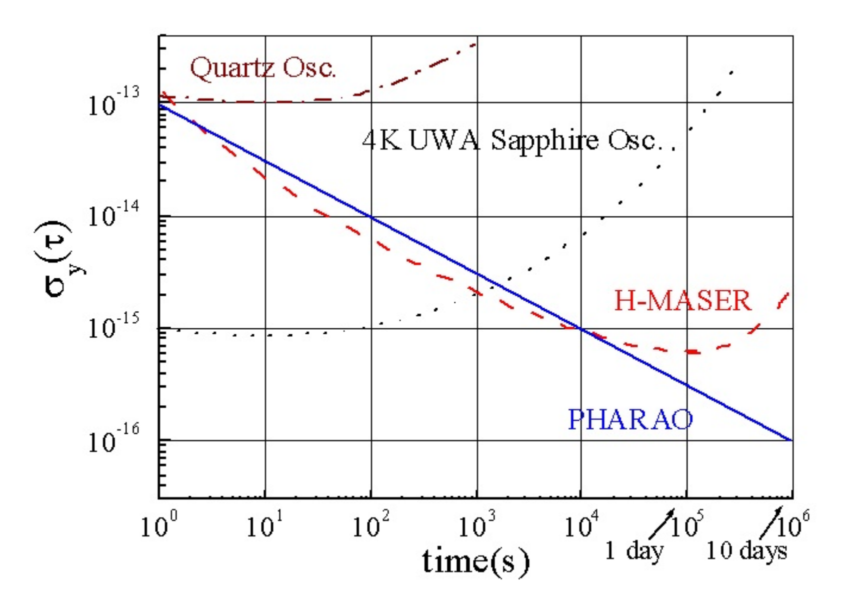


FIGURE 2.2 – Comparaison des stabilités en fréquence de différentes horloges : l'oscillateur à quartz, l'oscillateur cryogénique *UWA*, le *SHM* et l'horloge atomique *PHARAO*. τ est le temps mesuré, tandis que t est la durée sur laquelle la mesure est effectuée. Source : `http://smsc.cnes.fr/PHARAO/Fr/GP_science.htm`.

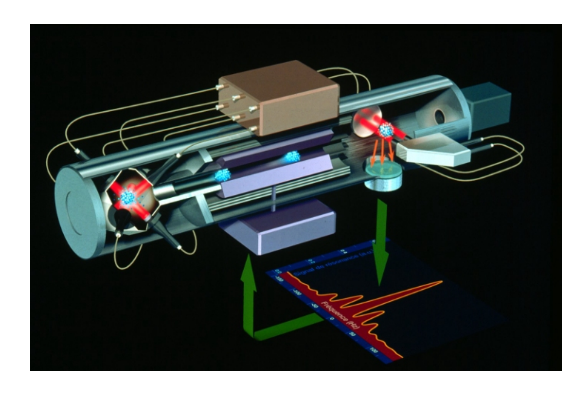


FIGURE 2.3 – Cycle de fonctionnement d'une horloge atomique. Source : `http://smsc.cnes.fr/PHARAO/Fr/GP_instrument.htm`.

PHARAO est, donc, composé de 5 sous-systèmes :
- Le tube à vide, ou *Tube Césium*, dans lequel la majorité du processus à lieu ;
- Le banc optique, ou *Source Laser*, qui permet la capture, le lancement, le refroidissement et surtout leur sélection et leur détection ;
- La source micro-onde, qui génère le champ micro-onde ;
- L'unité de gestion de bord, qui analyse les résultats mesurés, corrige, si nécessaire, la fréquence à appliquer à la source micro-onde et synchronise les instruments ;
- L'unité électronique qui gère le champ magnétique présent dans le tube.

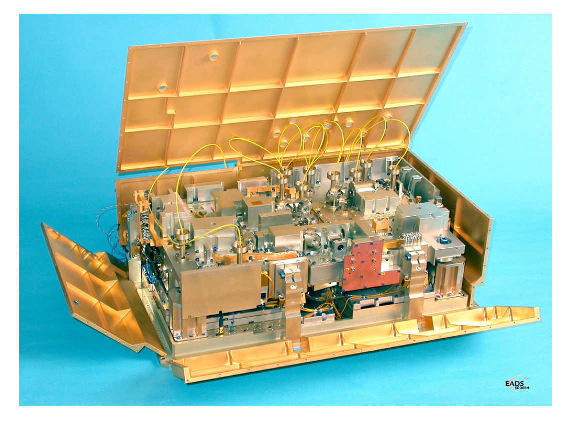
Enfin, le logiciel de vol coordonne l'ensemble des sous-systèmes pour garantir la bonne exécution du cycle. Dans le cadre de notre travail, nous nous concentrerons uniquement sur la Source Laser.

Les diverses études liées au projet se sont terminées courant 2011. Le projet est actuellement en fin de stade de réalisation, l'horloge atomique *PHARAO* étant en cours d'intégration au module *ACES*. Le lancement est, quant à lui, prévu courant 2013, au moyen du véhicule japonais *HTV* et du lanceur, japonais également, *HII-B*.

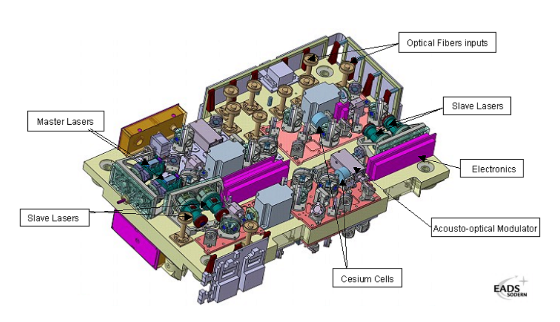
En plus de valider de nombreuses nouvelles technologies à l'environnement spatial, l'objectif de la mission *ACES* est de, d'abord, tester le bon fonctionnement de l'horloge atomique en micropesanteur, mais aussi établir une base de comparaison du temps avec le sol. L'objectif le plus attendu est la réalisation de plusieurs expériences de physique fondamentale, pour, en particulier, vérifier le principe de la relativité énoncée par Einstein en 1905.

2.3 Source Laser : présence d'une non linéarité

Cette étude porte exclusivement sur la Source Laser de *PHARAO*. Il s'agit de l'un des principaux sous-systèmes composant l'horloge atomique, représentant près de 25% de sa masse totale. La Source Laser complète avec son couvercle est illustrée à la Figure 2.4a, le banc optique seul est, quant à lui, schématisé à la Figure 2.4b. Celui-ci est composé d'un plateau en aluminium portant un grand nombre d'équipements (lasers, cellules à césium, obturateurs mécaniques, mécanismes de miroirs, ...) reposant, via quatre pieds, sur une base servant d'interface avec le reste du module *ACES*. L'ensemble pateau-équipements forme le banc optique. De manière à garantir le bon fonctionnement des dispositifs optiques tout au long de la mission, mais aussi s'assurer de leur survie au lancement, il était nécessaire d'isoler dynamiquement le banc optique du reste de la structure. Pour ce faire, des amortisseurs à base d'élastomère ont été placés entre les pieds et le plateau du banc. Illustré à la Figure 2.5, l'amortisseur maintenant le banc optique se présente comme deux pièces en aluminium, l'une interne, l'autre externe – aussi appelées, respectivement, le noyau et le corps –, entourant une couche d'élastomère de forme bicônique d'environ 5 mm d'épaisseur. Il a été réalisé sur mesure par la société *GAMMA*. Dès lors, ses propriétés sont uniques et adaptées aux



(a) Photographie de la Source Laser de *PHARAO*.



(b) Modèle CAO du banc optique seul.

FIGURE 2.4 – Source : `http://smsc.cnes.fr/PHARAO/Fr/source_laser.htm`.

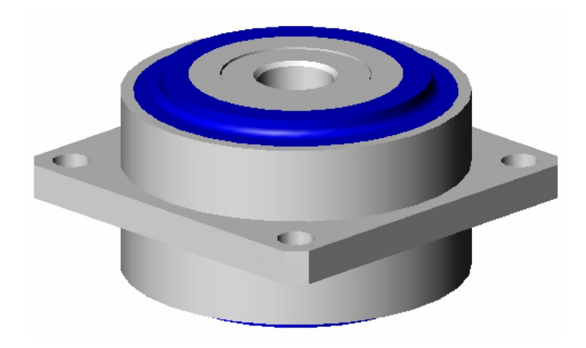


FIGURE 2.5 – Illustration de l'amortisseur utilisé sur la Source Laser de *PHARAO*. On distingue aisément les deux parties rigides en gris, l'une interne, l'autre externe, ainsi que la couche d'élastomère piégée, en bleu. Figure tirée de `http://www.gamma-sa.fr/`.

objectifs fixés dans le cahier des charges. Enfin, un capot protecteur enveloppe l'ensemble de la Source Laser.

2.3.1 Modèle éléments finis

Le modèle éléments finis de la Source Laser est présenté à la Figure 2.6. Il a été réalisé par la société *Mecano ID* et est détaillé dans l'étude [28]. Ce modèle a été validé et les tests de recette classiques ont été passés avec succès. Il totalise 265 800 noeuds et 303 857 éléments, soit 1 227 455 degrés de libertés. Comme pour la plupart des modèles éléments finis, il s'agit d'un modèle linéaire.

Ceci soulève, cependant, une question : comment représenter l'élastomère présent dans les amortisseurs ? En effet, nous savons que les élastomères exhibent des comportements très complexes et fortement non linéaires tant au niveau de leurs propriétés élastiques que dissipatives. En outre, ils possèdent généralement un coefficient de Poisson proche de $0,5$ et sont donc quasiment-incompressible. De nombreuses lois plus ou moins représentatives de ces propriétés particulières ont été formulées, cependant, elles nécessitent une grande connaissance du matériau et sont donc, sauf dans des cas spécifiques, difficilement applicables. Nous pouvons, par exemple, citer les lois de *néo-Hooke*, de *Mooney-Rivlin*, d'*Hart-Smith* ou d'*Ogden*. Soulignons que ces lois sont surtout utilisées pour modéliser correctement des cas impliquant de grandes déformations – jusqu'à plusieurs centaines de pourcents. Dans le système étudié ici, nous pouvons raisonnablement supposer que nous resterons dans la plage des petites déformations. Nous reviendrons, toutefois, sur ce point plus tard.

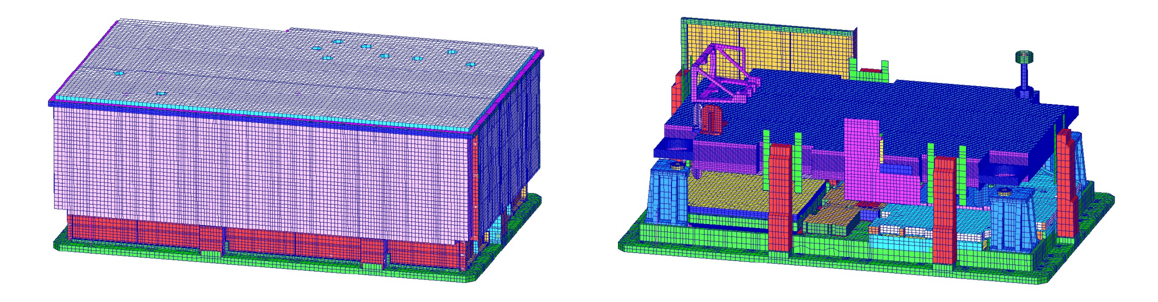


Figure 2.6 – Modèle éléments finis de la Source Laser de *PHARAO*. Au-dessus : avec capot. En-dessous : sans capot. On remarquera que les équipements ont été, pour la plupart, remplacés par des masses ponctuelles et que les amortisseurs ne sont pas représentés. Figures tirées de [28].

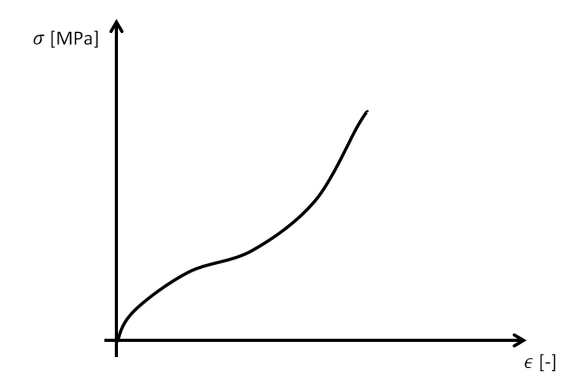


Figure 2.7 – Allure générale de la loi d'élasticité des matériaux élastomères. Deux types de comportements peuvent être remarqués : adoucissant à petites déformations et raidissant à grandes déformations.

Parce qu'ils possèdent un comportement élastique fortement non linéaire, la présence d'élastomères implique une dépendance des fréquences de résonance du système étudié en le niveau d'excitation appliqué. En effet, la loi Contrainte-Déformation qui leur est associée, prend généralement une allure telle que celle présentée à la Figure 2.7. On peut remarquer deux types de comportement. D'abord, pour de petites déformations, il est dit "adoucissant", c'est-à-dire que la raideur, i.e. le module de Young, diminue avec la déformation. Comme on peut le lire dans la littérature [19, pp. 41–80], ce type de non linéarité entraine une diminution de la fréquence de résonance observée à mesure que le niveau d'excitation augmente. Ceci s'explique par le simple fait qu'une excitation plus importante engendre de plus grandes déformations et donc une raideur perçue par le système moins élevée. Lorsque les déformations deviennent trop importantes, on entre alors dans la seconde partie de la courbe σ-ϵ, qui elle est "raidissante". Contrairement au cas précédent, la raideur du système augmente avec la déformation, entrainant le phénomène inverse, soit une augmentation des fréquences de résonance avec l'excitation.

Pour le modèle éléments finis de la Source Laser présenté ci-dessus, la solution choisie a donc été de remplacer la couche d'élastomère présente dans les amortissements par un ensemble de ressorts permettant de placer le premier mode de suspension selon Z à une fréquence de 140 Hz et les deux modes selon X et Y à la fréquence de 156 Hz pour le niveau de qualification. Ces fréquences, comme nous le verrons à la section suivante, sont les fréquences de résonance identifiées pour un amortisseur seul soumis à 1/4 de la masse du banc optique et à sujet à une excitation de valeurs gRMS égale à celle injectée à la base de la Source Laser pour le niveau de qualification à 0 dB. Notons, néanmoins, que ces raideurs devront être adaptées si d'autres niveaux d'excitation doivent être étudiés.

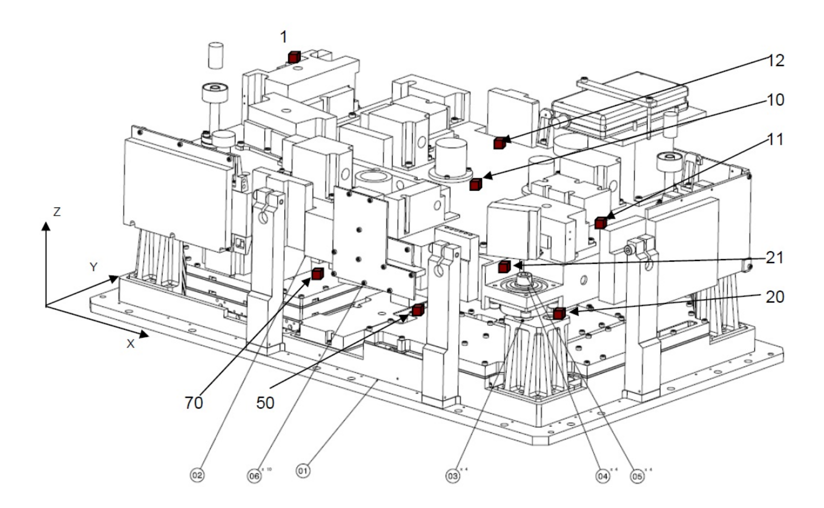


FIGURE 2.8 – Positions – indicatives – retenues pour la fixation des accéléromètres. L'ensemble totalisait 16 mesures. Le repère de référence utilisé pour celles-ci est également illustré. Les positions qui nous intéressent particulièrement ici sont les positions 20 et 21. En effet, elles encadrent la suspension dont le comportement est manifestement non linéaire. Figure tirée de [9].

2.3.2 Résulats d'essais

Les essais vibratoires menés en novembre 2011 sur la maquette structurale et thermique de la Source Laser ont révélé la présence d'une non linéarité adoucissante au niveau des amortisseurs. L'ensemble des tests et les conditions dans lesquelles ils ont été réalisés sont décrits dans le rapport [9]. Huit accéléromètres, ce qui représentait 16 mesures – tous les accéléromètres n'étant pas tridirectionnels – ont été disposés de manière à pouvoir rendre, au mieux, le comportement dynamique de la Source Laser. La Figure 2.8 présente ces positions retenues et l'orientation du repère de référence utilisé. En particulier, les accéléromètres 20 et 21, qui, eux, étaient triaxiaux, étaient fixés de part et d'autre de l'amortisseur responsable de la non linéarité présente dans le système.

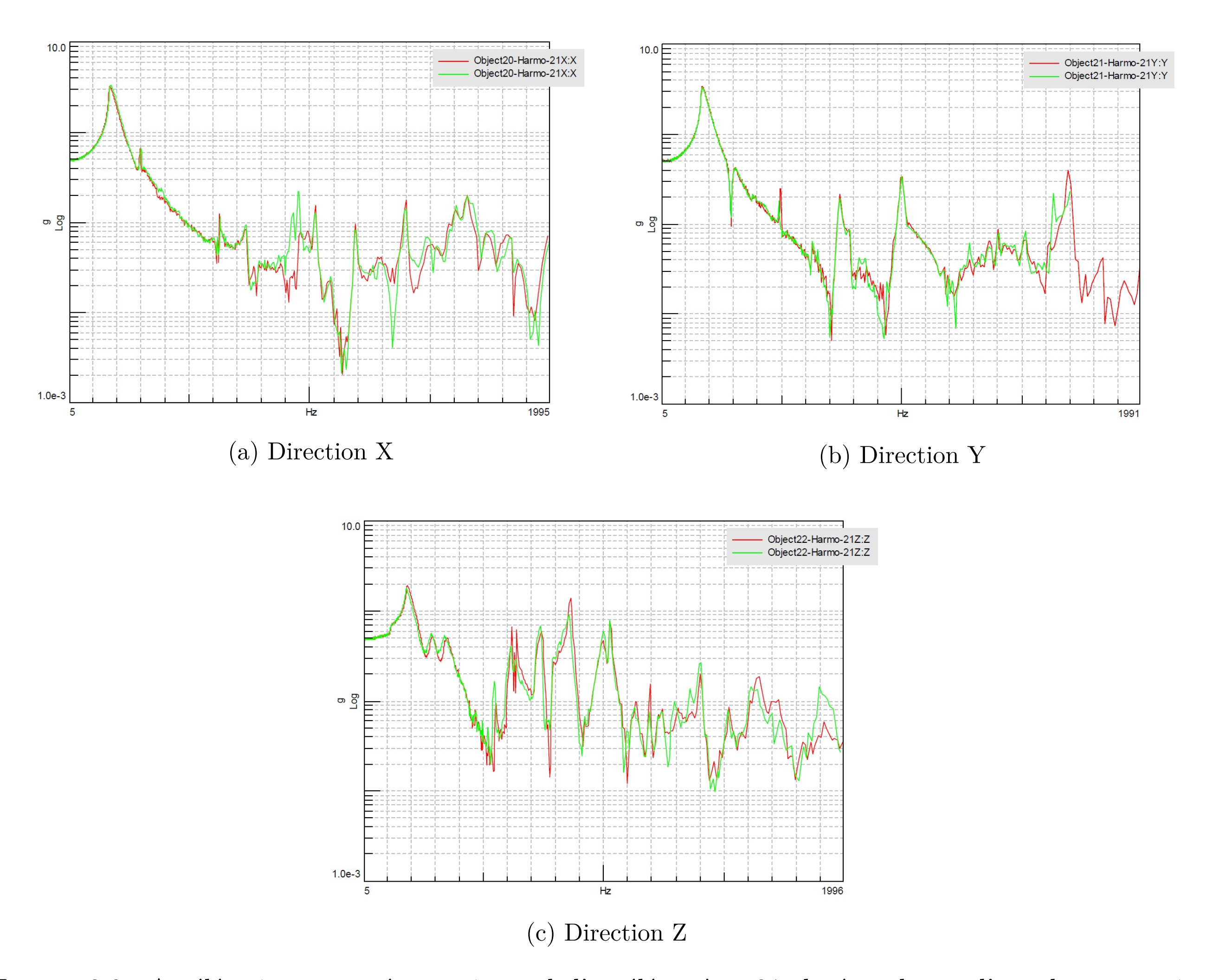
Comme le témoignent les Figures 2.9a, 2.9b et 2.9c comparant, pour chaque direction, les accélérations mesurées avant et après essais pour un niveau RFR [1], les premiers pics, correspondant aux modes de suspensions selon les trois directions X, Y et Z, ne sont pas symétriques et tendent à pencher légèrement vers la gauche. La littérature [19] nous apprend que ce phénomène est dû à une raideur diminuant avec la déformation, ce qui est en accord avec le comportement adoucissant des matériaux élastomères pour de faibles déformations. Les premières fréquences de résonance observées sont :

- Pour la direction X : 174 Hz avant et 171 Hz après les essais ;
- Pour la direction Y : 174 Hz avant et 170 Hz après les essais ;
- Pour la direction Z : 185 Hz avant et 178 Hz après les essais.

Ces fréquences sont toutes supérieures au critère des 100 Hz imposés et leur stabilité a été jugée acceptable. Ce comportement non linéaire n'est donc pas fondamentalement problématique pour les qualifications et ne met pas à mal la mission. Néanmoins, il pousse, tout de même, à la vigilance.

Suite à l'excitation RFR, la Source Laser a également été soumise à des vibrations aléatoires de cinq niveaux différents : le niveau de qualification à 0dB et quatre niveaux intermédiaires -3 dB, -6 dB, -9 dB et -12 dB. Chacun de ces tests a été effectué sur une durée de 2 minutes et pour chaque axe X, Y et Z. Les valeurs gRMS des niveaux à 0 dB injectés à la base dans les trois directions, ainsi que celles des réponses mesurées en-dessous et au-dessus de la suspension observée sont synthétisés à la Table 2.1. Les niveaux

1. RFR, pour *Recherche de Fréquences de Résonance*, est une excitation de type CHIRP de très faible niveau, typiquement d'un amplitude de 0,5 g, servant uniquement à repérer les positions des fréquences de résonance du système. Une large gamme de fréquences est balayée : entre 20 et 2000 Hz. La vitesse de balayage est imposée à 2 octaves/minute.



(a) Direction X

(b) Direction Y

(c) Direction Z

FIGURE 2.9 – Accélérations mesurées au niveau de l'accéléromètre 21 placé au-dessus d'une des suspensions du banc optique en fonction de la fréquence d'excitation. Cette dernière est un niveau RFR, uniquement destiné à mettre en évidence les fréquences de résonance de la structure. On peut remarquer que les pics associés aux premiers modes de suspension selon les trois directions sont légèrement penchés vers la gauche, ce qui témoigne de la présence d'une non linéarité adoucissante. Figures tirées de [9].

intermédiaires sont, quant à eux, obtenus grâce au fait qu'une réduction de 3 dB équivaut à une division par $\sqrt{2}$ de la valeur gRMS.

Rappellons que le niveau gRMS d'un signal quelconque x(t) discrétisé en N échantillons, est défini de la manière suivante :

$$gRMS_x = \frac{1}{g}\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2}$$

Elle peut également être vue comme la racine carrée de l'air en-dessous de la courbe de densité de puissance spectrale, qui s'exprime, lorsque le signal x(t) est comme ici une accélération, en g^2/Hz.

Les fréquences de résonance obtenues pour les différentes directions et les différents niveaux sont présentées à la Table 2.2. Les mêmes excitations ont été appliquées sur un amortisseur seul par le constructeur. La Table 2.2 liste également les fréquences mesurées pour ce nouveau cas. Il est important de souligner que la valeur gRMS du niveau injecté dans la suspension lors de ces essais était la valeur injectée à la base de la Source Laser et non la valeur passant effectivement dans la suspension, i.e. celle mesurée à la position 20. D'autre part, un lest, parfaitement centré et d'une masse équivalant à 1/4 de la masse du banc optique, est placé au-dessus de la suspension.

On peut, tout d'abord, remarquer que les deux cas étudiés – Source Laser complète et suspension seule – témoigne du même phénomène. Ce dernier est, dès lors, bien du à l'amortisseur lui-même. Ensuite, on constate que la fréquence de résonance mesurée diminue à mesure que le niveau d'excitation est élevé. Ceci résulte bien de l'adoucissement que nous suspections. Les différences peuvent être, principalement, expliquées par le fait que la dynamique du banc optique lui-même, mais aussi celle des pieds ne sont pas prises en compte dans les essais réalisés sur la suspension seule. S'ajoute également à cela le fait que chaque suspension n'est pas soumise à, précisément, 1/4 de la masse du banc. Ce dernier n'est effectivement pas symétrique.

Les fréquences mesurées pour le niveau de qualification à 0 dB sont d'environ 140 Hz pour chacun des axes, ce qui correspond à la fréquence utilisée pour définir les raideurs des ressorts remplaçant les couches d'élastomère dans le modèle éléments finis. Aucun recalage ne sera, dès lors, nécessaire. De plus, ces fréquences sont conformes aux exigences formulées. La non linéarité n'a, par conséquent, pas été jugée critique et la maquette validée.

Le modèle éléments-finis a permis d'obtenir des représentations des trois premiers modes de la Source Laser, les trois modes de suspension. Ceux-ci sont présentés aux Figures 2.10a, 2.10b et 2.10c.

2.4 Problématique et stratégie adoptée

Des travaux au sein du *C.N.E.S.* ont entrepris de prendre en compte les non linéarités directement lors de la modélisation du système. Les études R&T *DyNoLi* déjà mentionnées [6, 34] avait déjà entrepris de simuler correctement des systèmes non linéaires grâce au logiciel *MSC.Nastran*. Plusieurs cas concrets ont été étudiés avec plus ou moins de succès et une série de recommandations à pu être dressée. Toutefois, aucun travail ne s'est encore attelé à la tâche d'identifier une non linéarité à partir de mesures prises sur une structure présentant un comportement non linéaire, en vue d'un possible recalage du modèle éléments finis. Le cas de la Source Laser de *PHARAO* et de ses amortisseurs fortement non linéaires constitue un candidat de choix.

Cette problématique s'inscrit dans la méthodologie de *Vérification & Validation de modèles*, telle qu'elle est présentée à la Figure 2.11, détaillée dans un document. Cette étape vise à garantir l'utilisation de modèles représentatifs du cas réel, en lesquels l'utilisateur peut avoir confiance et surtout, peut quantifier cette confiance, du moins dans les conditions pour lesquelles le modèle a été réalisé. L'étape

Excitation selon l'axe X		
Position	**Direction**	**Niveau gRMS à 0dB**
Niveau injecté à la base	X	8,34
Face supérieure du pied (20)	X	12,41
	Y	9,27
	Z	5,21
Suspension du banc optique (21)	X	9,41
	Y	0,89
	Z	1,6

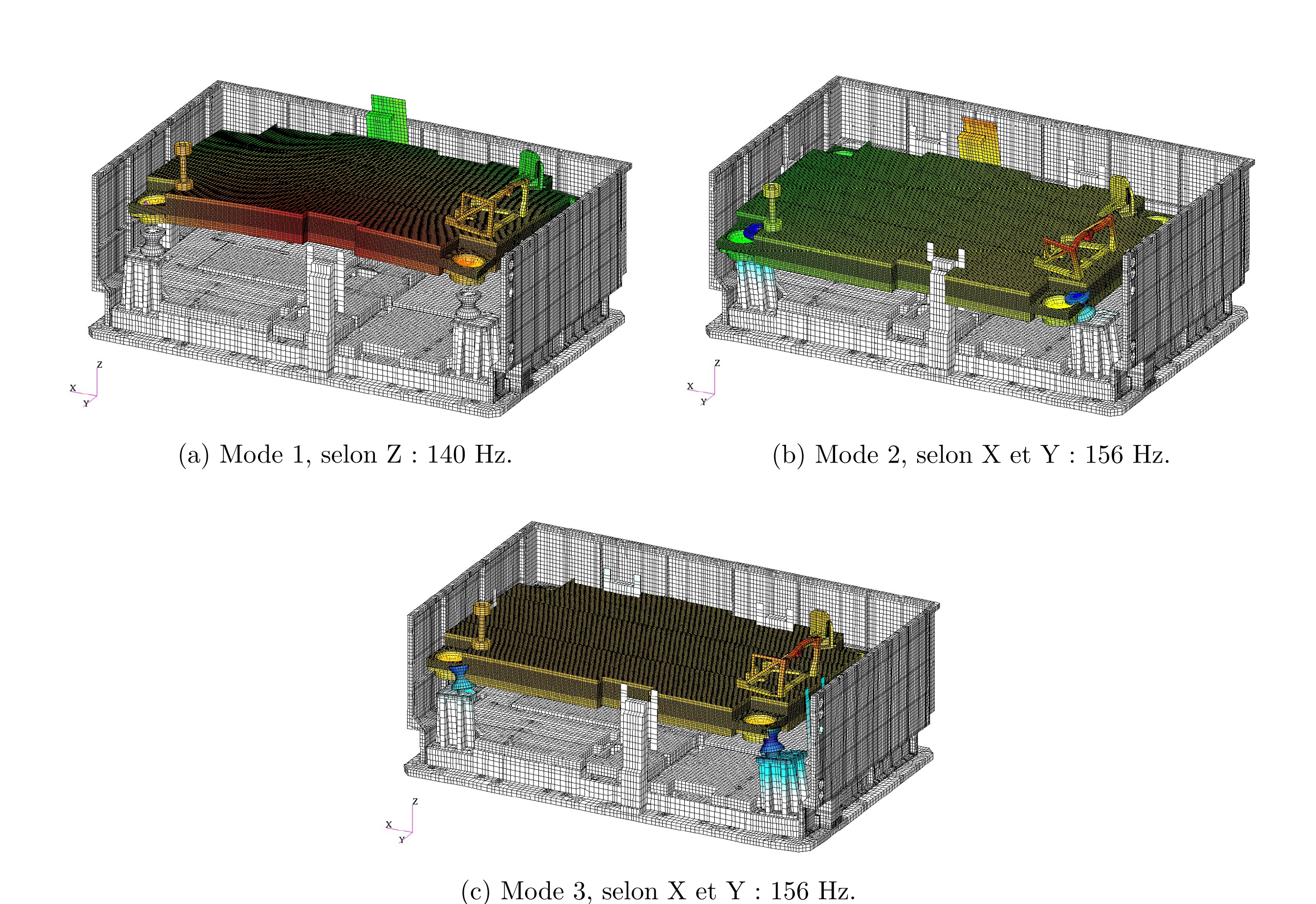
Excitation selon l'axe Y		
Position	**Direction**	**Niveau gRMS à 0dB**
Niveau injecté à la base	Y	8,1
Face supérieure du pied (20)	X	4,71
	Y	11,94
	Z	2,77
Suspension du banc optique (21)	X	0,57
	Y	9,57
	Z	2,44

Excitation selon l'axe Z		
Position	**Direction**	**Niveau gRMS à 0dB**
Niveau injecté à la base	Z	10,91
Face supérieure du pied (20)	X	9,5
	Y	9,1
	Z	10,15
Suspension du banc optique (21)	X	1,68
	Y	1,13
	Z	12,64

TABLE 2.1 – Valeurs gRMS des niveaux 0 dB injectés à la base de la Source Laser dans les trois directions, ainsi que celles mesurées en-dessous (position 20) et au-dessus (position 21) de la suspension. Valeurs tirées de [9].

Direction	Niveau d'excitation					
	0 dB	**-3 dB**	**-6 dB**	**-9 dB**	**-12 dB**	**RFR**
X	136	139	151	154	163	171
Y	142	151	154	157	163	170
Z	136	139	145	154	162	185
Amortisseur seul XY	156	162	178	184	188	211
Amortisseur seul Z	140	146	156	166	174	211

Table 2.2 – Fréquences [Hz] de résonance mesurées aux positions 20 et 21 pour les différents niveaux d'excitation aléatoire. Sont également présentées les fréquences de résonance mesurée pour l'amortisseur seul, isolé du reste de la structure. Il est important de souligner que le niveau injecté à la base de l'amortisseur seul est identique au niveau injecté à la base de la Source Laser et non le réel niveau mesuré à la position 20 lors des essais. Ce tableau montre que le comportement observé pour la maquette est similaire à celui observé pour la suspension seule. Dès lors, c'est bien elle qui en est responsable. Fréquences tirées du rapport d'essais [9].



(a) Mode 1, selon Z : 140 Hz.

(b) Mode 2, selon X et Y : 156 Hz.

(c) Mode 3, selon X et Y : 156 Hz.

Figure 2.10 – Premiers modes de la Source Laser de *PHARAO* : modes de suspensions. Ils ont été calculés à partir du modèle éléments-finis linéaire réalisé. Les déformations sont amplifiées afin de les rendre visibles. Représentations tirées de [28].

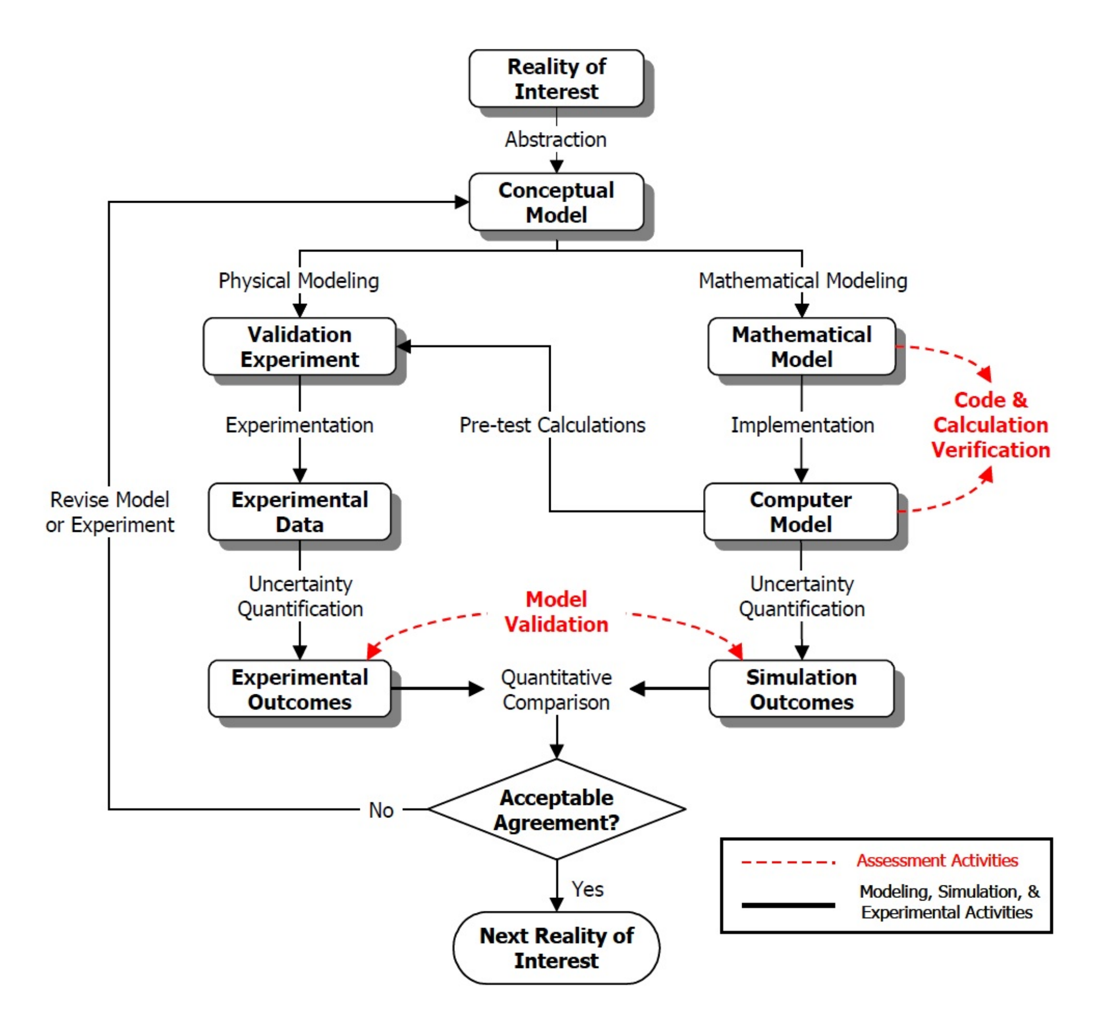


FIGURE 2.11 – Processus de *Vérification & Validation de modèles*, telle qu'elle est présentée dans [35].

de *Vérification* s'attarde plutôt sur les aspects mathématiques des simulations : équations résolues, méthodes de résolutions, ... En d'autres mots, le modèle résolu correspond-t-il effectivement au modèle conceptuel que nous désirons résoudre ? La *Validation*, quant à elle, se concentre sur la comparaison "modèle expérimental"-"modèle numérique" et tâche de répondre à la question : le modèle numérique réalisé représentera-t-il de manière précise et fiable le phénomène réel que l'on désire étudier dans les conditions considérées ? Sur la Figure 2.11, les étapes de *Vérification* et de *Validation* sont mises en évidence en rouge.

Le processus de *Vérification & Validation de modèles* est important et doit être gardé à l'esprit pour toutes les études d'ingénierie. Il est détaillé dans [35]. Les méthodes d'identification se positionnent au niveau du recalage du modèle numérique en vue d'une meilleure adéquation entre ce dernier et le modèle expérimental. Il est important de souligner qu'un modèle numérique est conçu dans un but très préçis de représentation d'un phénomène ou d'un comportement particulier. En effet, tâcher de modéliser très précisément une structure complète – et, généralement, complexe –, en allant jusqu'à mailler avec une grande précision chaque vis, chaque rondelle, est superflu et, le plus souvent, impossible à réaliser. L'ingénieur se doit de faire des approximations, des suppositions, lui permettant de rendre le cas à traiter plus simple et accessible. La présence de non linéarités dans une structure en constitue un bon exemple. En effet, il est inutile de s'entêter à vouloir inclure ces caractéristiques, de quelque façon que ce soit, dans le modèle mathématique, si les phénomènes que l'on désire étudier grâce à ce modèle ne les font intervenir d'aucune façon.

La première étape de ce travail consistera, dès lors, à utiliser les données expérimentales dont nous disposons pour introduire la non linéarité présente au niveau du matériau élastomère dans le modèle éléments finis déjà réalisé. Nous verrons, malheureusement, que nos connaissances concernant l'élastomères sont très limitées et plusieurs estimations devront être faites. Le modèle, désormais non linéaire, sera ensuite simulé temporellement au moyen du module d'intégration implicite SOL 129 de *MSC.Nastran* pour en extraire les séries temporelles de plusieurs de ses noeuds. Celles-ci seront post-traitées au moyen d'une méthode d'identification très simple à mettre en oeuvre, appelée la *Restoring Force Surface* à la section suivante. La *RFS* nous conduira à l'obtention d'un système à un degré de liberté contenant l'effet de la non linéarité. Par un procédé itératif, nous pourrons, enfin, estimer la loi de comportement élastique non linéaire identifiée par la méthode et comparer celle-ci à celle réellement présente dans le modèle.

Sur base des données que nous possédons, deux cas pourront être traités. Nous commencerons par celui d'un amortisseur seul soumis à 1/4 de la masse du banc optique. Ensuite, la procédure sera appliquée à une modélisation plus complète faisant intervenir les quatres amortisseurs ainsi qu'un super-élément représentant le banc optique. En plus de démontrer (ou non), la capacité de la méthode d'identification utilisée, la *Restoring Force Surface*, à saisir la loi de comportement non linéaire présente dans le modèle étudié, ce travail aura pour but d'établir une certaine méthodologie, en vue d'une application pratique sur base de données temporelles récoltées lors des phases d'essais.

Présentées précédemment aux Figures 2.10a, 2.10b et 2.10c, les analyses modales menées lors de l'étude du modèle éléments-finis [28] ont permis de mettre en évidence la dynamique complète de la Source Laser pour ses trois premiers modes, les modes de suspension. On constate, ainsi, que les modes impliquant un mouvement selon les axes X et Y du banc optique, font également apparaitre une déformation sensible des pieds sur lesquels sont fixés les amortisseurs. Dès lors, l'étude de ces modes nécessiterait la prise en compte de la déformation des pieds dans le modèle, soit en les considérant directement dans le modèle éléments-finis, soit en les remplacant par des super-éléments. Le mode selon Z, quant à lui, n'implique, en dehors de celle des amortisseurs, qu'une déformation du banc lui-même.

Afin de diminuer la complexité du problème et, en particulier, de réduire sa taille, nous nous concentrerons sur le mode de suspension selon la direction Z. En effet, dans ce cas, il est possible de supposer les pieds rigides et la base de l'amortisseur encastrée.

2.5 Méthode de la *Restoring Force Surface*

Une approche permettant d'identifier les caractéristiques d'un système, en particulier, non linéaire a été introduite par la méthode de la *Restoring Force Surface* – aussi appelée méthode du *Relevé des Forces Internes*. Présentée par Masri et Caughey [25] en 1979 pour les systèmes à un degré de liberté, la *RFS* a bénéficié grandes améliorations au fil des années et a pu être éprouvée sur un grand nombre de cas, parmi ceux-ci nous pouvons citer l'étude de joints de structures spatiales – Crawley et O'Donnell [22] – ou de poutres encastrées soumises à un impact – Worden et Tomlinson [18] ou Kerschen et al. [26]. Elle se base sur l'utilisation des séries temporelles du degré de liberté du système. Une procédure très similaire, nommée *Force-State Mapping*, fut développée indépendamment par Crawley et Aubert [10] et Crawley et O'Donnell [22] en 1986. Ces derniers ont également introduit l'un des avantages majeur de la méthode, la surface dite de *Crawley & O'Donnell* permettant de représenter, en trois dimensions, la force interne du système à un degré de liberté par rapport à son état $(q,\ \dot{q})$. Enfin, soulignons que des extensions aux systèmes à plusieurs degrés de liberté ont été proposées par Masri, Sassi et Caughey [31]. Toutefois, dans ces cas, la surface de *Crawley & O'Donnell* n'est plus représentable.

La méthode se base sur l'équation du mouvement d'un système à un degré de liberté, qui peut s'écrire sous la forme discrète, pour l'instant t_i :

$$m\ddot{q}_i + f_i\left(\dot{q}_i,\ q_i\right) = p_i$$

où $f_i(\dot{q}_i,\ q_i)$ est la force interne de rappel du système fonction du déplacement q_i et, en présence de dissipation, de la vitesse $\dot{q}_i$. Dans le cas d'un système linéaire amorti, elle s'écrira :

$$f_i\left(\dot{q}_i, q_i\right) = kq_i + c\dot{q}_i$$

Connaissant la valeur de l'accélération $\ddot{q}_i$ et de la charge appliquée p_i en chaque pas de temps i, la force interne est connue pour tout i :

$$f_i\left(\dot{q}_i,\ q_i\right) = p_i - m\ddot{q}_i$$

Il ne nous reste donc qu'à trouver l'expression mathématique de $f\left(\dot{q},\ q\right)$ pour connaitre les caractéristiques (raideur, amortissement, ...) du système étudié. Pour ce faire, Masri et Caughey construisait un modèle paramétrique basé sur l'utilisation d'une double série de Chebyshev :

$$f\left(\dot{q},\ q\right) = \sum_{u=0}^{m}\sum_{v=0}^{n} C_{uv} T_u\left(q\right) T_v\left(\dot{q}\right)$$

où $T_u\left(q\right)$ est le polynôme de Chebyshev d'ordre u. Ceux-ci présentaient l'avantage d'être orthogonaux et donc les coefficients identifiés étaient indépendant des ordres u et v choisis. Une augmentation de ces derniers n'impliquait, dès lors, pas de devoir recalculer l'ensemble des coefficients. Toutefois, une approche plus simple, plus rapide et surtout plus précise a été proposée par Al-Hadid et Wright [20]. Celle-ci repose sur l'utilisation de la simple expression polynomiale suivante :

$$f\left(\dot{q},\ q\right) = \sum_{u=0}^{m}\sum_{v=0}^{n} \alpha_{uv}\mathbf{q}^u\dot{\mathbf{q}}^v$$

Qui, lorsqu'elle est résolue pour tous les instants, peut être mise sous forme matricielle :

$$f\left(\dot{\mathbf{q}},\ \mathbf{q}\right) = \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}$$

avec :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{q} & \dot{\mathbf{q}} & \mathbf{q}\dot{\mathbf{q}} & \mathbf{q}^2 & \dot{\mathbf{q}}^2 & ...\end{bmatrix}$$

Cette matrice $\mathbf{A}$ est entièrement connue grâce aux séries temporelles mesurées, et le vecteur :

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix}\alpha_{00} \\ \alpha_{10} \\ \alpha_{01} \\ \alpha_{11} \\ ...\end{bmatrix}$$

est enfin déterminé en résolvant les équations normales au sens des moindres carrés :

$$\boldsymbol{\alpha} = \left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{f}$$

En pratique, les termes croisés, tels que $\mathbf{q}\dot{\mathbf{q}}$, ont peu d'influence et sont négligés. De même, le terme constant $[\mathbf{1}]$ est évincé car il introduirait une charge statique ou un déplacement résiduel dans le modèle étudié. De plus, les termes pairs, tels que $[\mathbf{q}^2]$ ou $[\dot{\mathbf{q}}^2]$ ne sont pas représentatifs d'un comportement

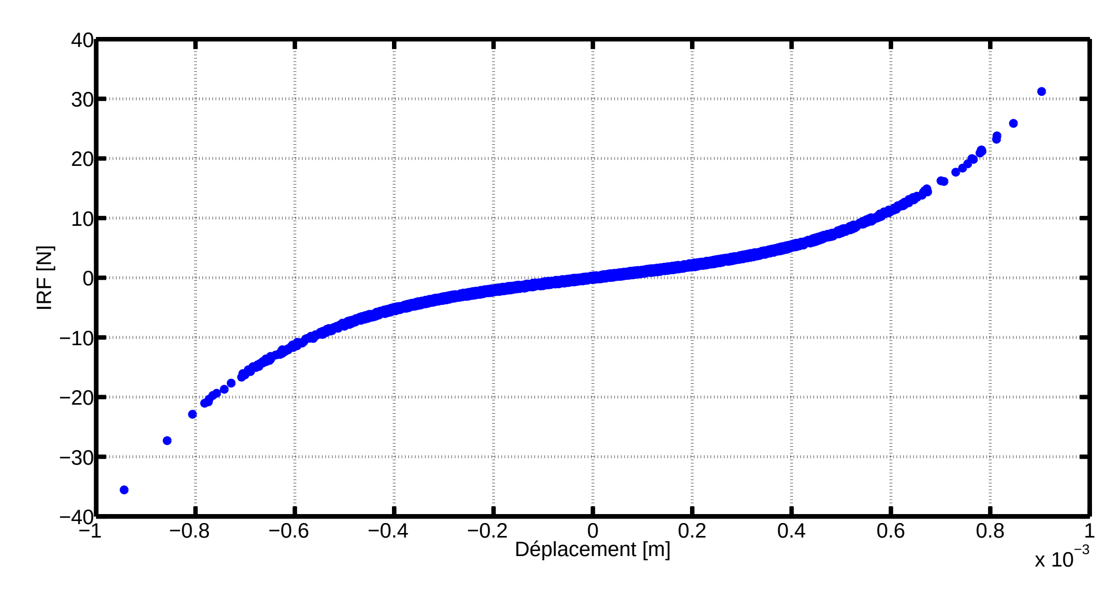


FIGURE 2.12 – Exemple de courbe force interne en fonction du déplacement permettant de déterminer le modèle mathématique à supposer. On voit clairement apparaitre l'allure de la courbe de raideur.

physique, c'est pourquoi ils sont généralement remplacés par : $[\text{sign}(\mathbf{q})\,\mathbf{q}^2]$ ou $[\text{sign}(\dot{\mathbf{q}})\,\dot{\mathbf{q}}^2]$, qui sont, eux, impairs. Suite à ces remarques, la matrice **A** peut se réécrire :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} & \dot{\mathbf{q}} & \text{sign}(\mathbf{q})\mathbf{q}^2 & \text{sign}(\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}^2 & \mathbf{q}^3 & \dot{\mathbf{q}}^3 & ... \end{bmatrix}$$

En général, la masse associée au degré de liberté étudié est connue. Cependant, il peut exister des cas où cette information n'est pas accessible. Elle doit, alors, être estimée et ce de manière précise afin de ne pas mettre à mal l'identification des autres paramètres. Deux méthodes apportent une solution à ce problème : une première proposée par Al-Hadid et Wright [21], une seconde par par Worden et Tomlinson [17].

Bien entendu, le choix des termes apparaissant dans la matrice **A** – qui correspond au modèle mathématique choisi pour représenter le comportement du système – est laissé à l'utilisateur. En effet, en fonction de la connaissance du système, nous pourrons minimiser le nombre de paramètre à identifier. En d'autres mots, si l'on suppose la présence d'une raideur cubique, le terme $[\mathbf{q}^3]$ devra être présent dans la matrice **A**, tandis que les termes $[\text{sign}(\mathbf{q})\,\mathbf{q}^2]$, $[\text{sign}(\dot{\mathbf{q}})\,\dot{\mathbf{q}}^2]$ et $[\dot{\mathbf{q}}^3]$ pourront être évincés. Moins le nombre de paramètres à identifier est élevé, plus les valeurs obtenues pour ces derniers seront représentatives.

Pour nous aider à choisir les paramètres à insérer dans le modèle mathématique, les courbes représentant la force interne en fonction de la vitesse, la force interne en fonction du déplacement, ainsi que la surface de *Crawley & O'Donnell* sont particulièrement utiles. Notons que pour ces deux premières courbes, il est préférable de ne considérer les mesures pour lesquelles, respectivement, le déplacement ou la vitesse seront nuls. La surface de *Crawley & O'Donnell*, quant à elle, représente, en trois dimensions, la force interne en fonction du déplacement et de la vitesse. Des exemples de ces trois courbes, obtenues pour un cas concret, sont données aux Figures 2.12, 2.13 et 2.14.

Il est important de souligner que pour que ces courbes soient complètes et contiennent suffisamment d'information, il est nécessaire que les échantillons soient répartis, le plus uniformément possible, dans l'espace d'état $(\mathbf{q},\ \dot{\mathbf{q}})$. Sinon, la surface de *Crawley & O'Donnell* peut être "trouée", comme le présente la Figure 2.15, et les courbes difficiles à interpréter. Pour ce faire, il est préférable que le système soit excité au moyen d'un sinus balayé, d'un bruit blanc ou, si son amortissement n'est pas trop important, d'observer sa réponse libre. Le sinus balayé sur une plage de fréquence suffisamment grande est l'excitation idéale. La surface de *Crawley & O'Donnell* illustrée à la Figure 2.15 correspond à celle d'un système excité par

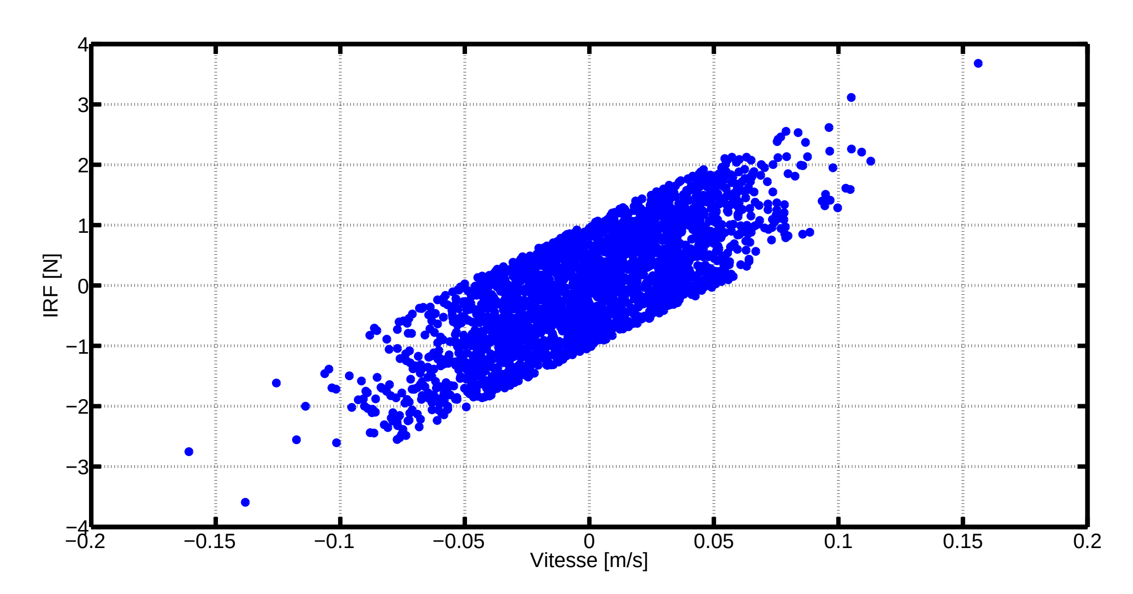


FIGURE 2.13 – Exemple de courbe force interne en fonction de la vitesse permettant de déterminer le modèle mathématique à supposer. Bien que l'on voit apparaitre une direction principale, nous ne pouvons distinguer précisément l'allure de la courbe d'amortissement.

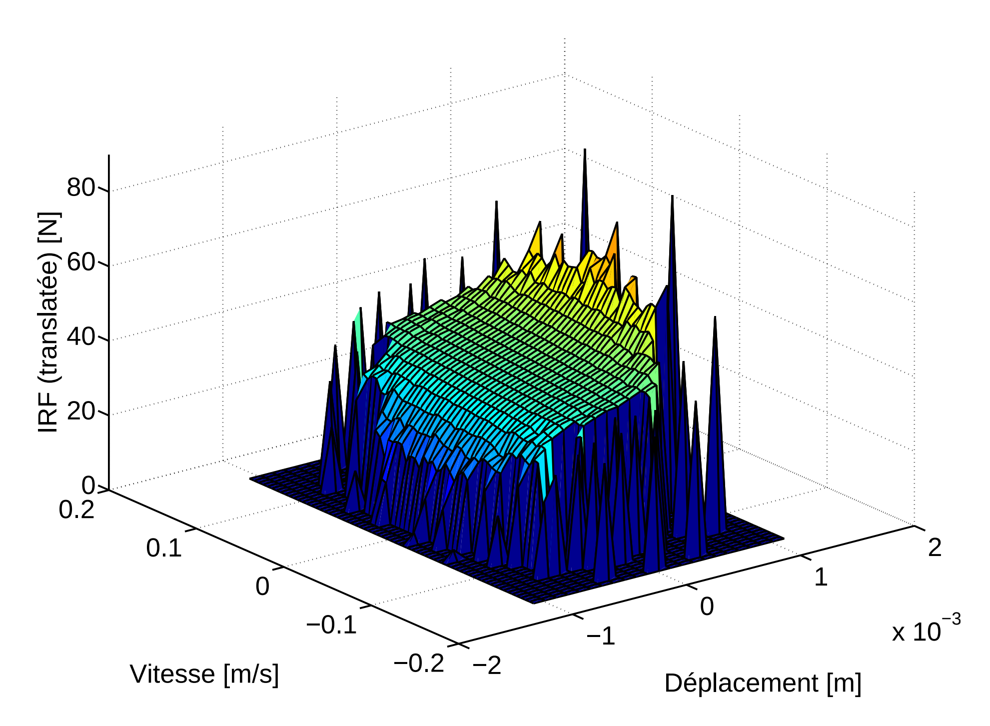


FIGURE 2.14 – Exemple de surface de *Crawley & O'Donnell* permettant de déterminer le modèle mathématique à supposer.

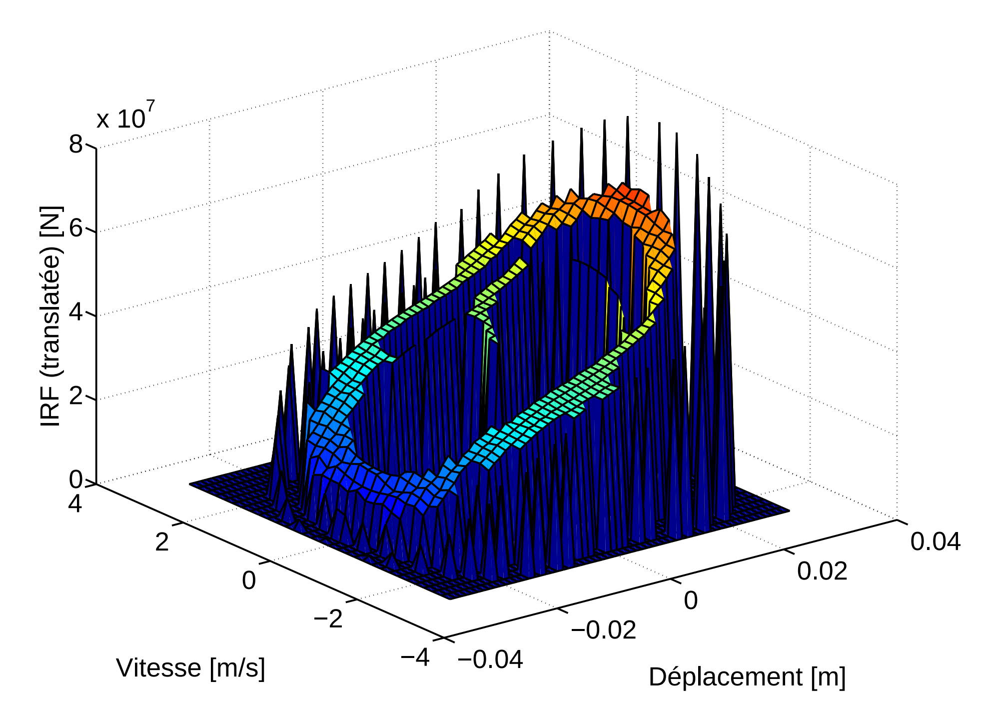


FIGURE 2.15 – Surface de *Crawley & O'Donnell* obtenue pour un système excité par une sinusoïde d'amplitude et de fréquence constante. La surface est "trouée" et ne permet pas d'estimer le modèle mathématique le plus adapté pour l'identification du système.

une sinusoïde d'amplitude et de fréquence constante ; les points mesurés sont tous situés dans une même boucle et la surface est percée, ce qui rend difficile son analyse. Pour palier à ce problème, une méthode d'interpolation complexe a été proposée par Worden et Tomlinson [16]. Une autre solution, introduite par Duym et Schoukens [5], se concentre sur la conception d'un signal d'excitation optimisé permettant de couvrir plus uniformément l'espace d'état.

Afin de rendre l'identification plus précise, il est préférable d'épurer au maximum les signaux d'entrées (i.e. l'accélération, la vitesse, le déplacement et la charge appliquée) de manière à en enlever toute information qui pourrait être considérée comme parasite. Le filtrage des signaux pour en éliminer le bruit ou le fenêtrage pour en éliminer les effets transitoires (apparaissant en début de simulation par exemple) constitue un pré-traitement bénéfique à l'identification. D'autre part, il est important que les signaux traités contiennent un maximum d'information et présentent un comportement non linéaire. C'est pourquoi, pour la procédure d'identification, il est préférable de se concentrer sur la réponse au niveau de la résonance, où les déplacements sont plus importants et donc la non linéarité plus visible.

Une fois les paramètres $\boldsymbol{\alpha}$ obtenus, il nous faut connaitre lesquels de ces paramètres sont les plus influents et lesquels peuvent être délaissés. Cette importante est donnée par le *facteur d'importance* (ou *significance factor*) définit de la manière suivante :

$$s_\theta = 100\frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_x^2}$$

où σ_θ est la variance du terme $\alpha_{ij}x^i\dot{x}^j$ considéré et σ_x est la variance de tous les termes $\alpha_{ij}x^i\dot{x}^j$. Un *significance factor* élevé témoignera d'un terme important et donc non négligeable, tandis que les termes ayant un *significance factor* faible (négligeable devant les autres) pourront être écartés.

Les coefficients identifiés peuvent, ensuite, être utilisés pour réévaluer la force interne du système sur base des séries temporelles expérimentales. La qualité de l'identification peut alors être évaluée en comparant les mesures expérimentales aux valeurs recalculées. Pour ce faire, la *Mean Square Error* se révèle

particulièrement utile. Cet outil permet de comparer de manière quantitative deux séries temporelles. La *MSE* d'un signal x de N échantillons est définie de la manière suivante :

$$MSE(x) = \frac{100}{N\sigma_x^2} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \hat{x}_i)^2$$

où σ_x est l'écart-type du signal x, x_i la valeur mesurée à l'instant i et $\hat{x}_i$ la valeur prédite par le modèle identifié. Une erreur inférieure à 5% témoigne d'une bonne corrélation. Lorsqu'elle est plus petite qu'un pourcent, les résultats sont jugés excellents. Il est également possible d'aller plus loin et de simuler – au moyen d'un schéma d'intégration directe de Newmark par exemple – le système identifié, puis de comparer le comportement calculé avec celui observé lors des essais.

La méthode de la *Restoring Force Surface* se montre efficace, fiable et très simple à mettre en oeuvre. Aucune connaissance, à priori, de la non linéarité n'est nécessaire grâce à la présence des outils numériques comme les facteurs d'importance qui mettront en évidence les facteurs participant de manière significative à la réponse du système. Néanmoins, la moindre connaissance préalable – par exemple, avoir une estimation de la raideur linéaire du système – permettra d'identifier de manière plus précise et cohérente les autres paramètres.

Cette procédure présente, néanmoins, l'inconvénient de nécessiter la connaissance de l'accélération, la vitesse, le déplacement du degré de liberté étudié, ainsi que la force qui lui est appliquée. En effet, en pratique, ces données sont difficilement accessibles – généralement seules l'accélération et la force appliquée sont connues. Des procédures d'intégration ou de dérivation, permettant, à partir de l'une des trois séries – accélération, vitesse ou déplacement – de déterminer les autres, ont été étudiées par Worden [37]. Son article révèle que la procédure de dérivation mène à une amplification des composantes hautes fréquences contenues dans le signal. Toutefois, elle implique, surtout, de part sa définition de limite, de réaliser un compromis entre les erreurs d'approximations et les erreurs d'arrondis. Cette approche est donc fortement déconseillée.

Parmi les méthodes d'intégration numériques simples, telles que les méthodes du trapèze, de Simpson ou de Tick, la première se présente comme la plus stable. En effet, sa fonction de transfert est inférieure à l'unité sur toute la plage de fréquences observables. Elle ne mènera, dès lors, pas à l'apparition d'instabilités à hautes fréquences. Néanmoins, la procédure d'intégration implique l'introdution de composantes très basses fréquences qui peuvent être filtrées au moyen d'un filtre passe-haut. La fréquence de coupure n'est, à priori pas connue, mais peut être estimée par l'utilisateur en représentant, par exemple, la densité de puissance spectrale du signal. Ce choix est impératif. En effet, une fréquence de coupure trop faible n'impliquerait pas la totale suppression des composantes erronnées, tandis qu'une fréquence trop élevée provoquerait la disparition de composantes correctes.

On préférera généralement utiliser un filtre de *Butterworth* qui assure la conservation d'un gain constant sur l'entièreté de sa bande passante, ainsi qu'un comportement très lisse dans sa bande stoppante. Néanmoins, la décroissance au-delà de la fréquence de coupure est relativement lente. Les autres filtres disponibles tels que les filtres de *Chebyshev* de type I et II ou le filtre *elliptique* présentent, quant à eux, des transitions plus abruptes, toutefois, cela implique la présence d'oscillations plus ou moins importantes. Les comportements de ces différents filtres sont illustrés aux Figures 2.16, 2.17, 2.18 et 2.19. Il est donc nécessaire de réaliser un compromis entre transition abrupte et absence d'oscillations. Sauf dans le cas où les fréquences d'intérêt et les fréquences parasites sont très proches, on se tournera vers le filtre de *Butterworth* qui garantit une très bonne conservation de ces premières. Enfin, pour ne pas introduire de déphasage, on veillera à filtrer en avant, puis en arrière.

Soulignons, pour terminer, qu'il est vivement conseiller de filtrer l'ensemble des signaux utilisés lors de la procédure d'identification, c'est-à-dire accélération, vitesse, déplacement et force appliquée.

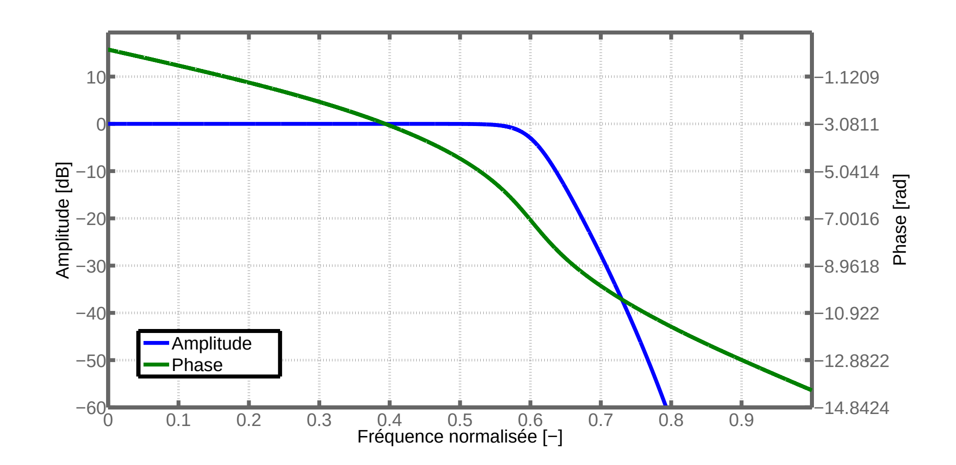


Figure 2.16 – Amplitude et phase du filtre de *Butterworth*.

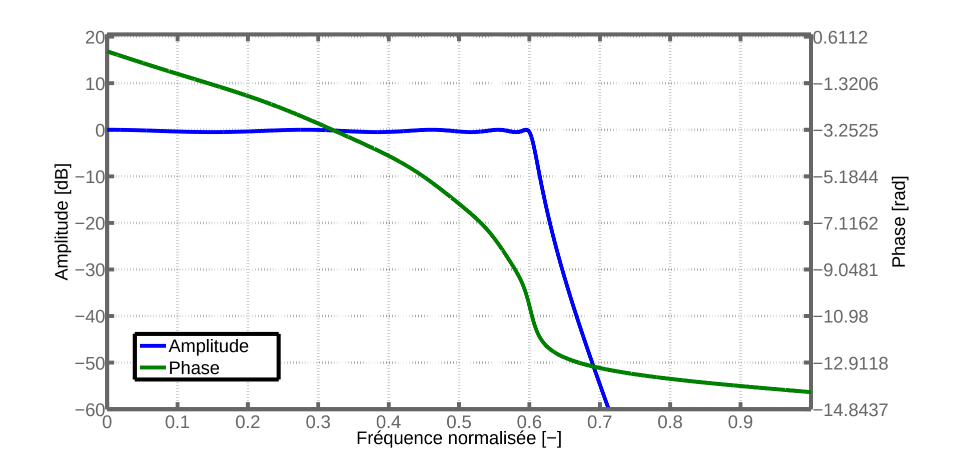


Figure 2.17 – Amplitude et phase du filtre de *Chebyshev type I*.

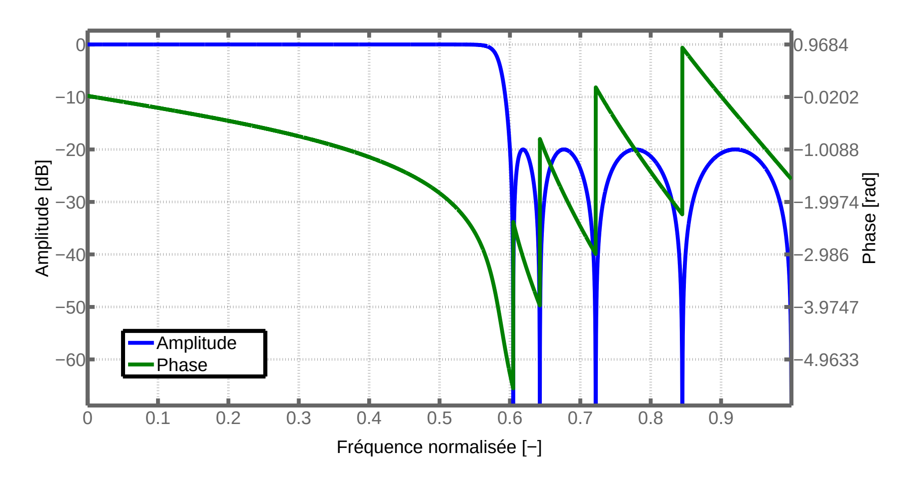


Figure 2.18 – Amplitude et phase du filtre de *Chebyshev type II*.

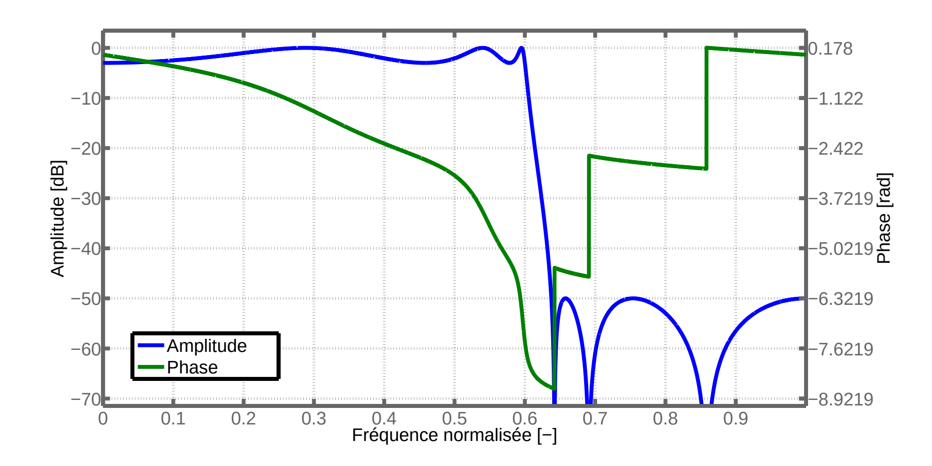


FIGURE 2.19 – Amplitude et phase du filtre *elliptique*.

2.6 Conclusion

Dans ce deuxième chapitre, nous avons pu mettre en place la problématique qui sera traitée à travers la suite de ce travail. Après avoir présenté le projet *PHARAO* et la mission *ACES* dans lequel s'inscrit cette étude, nous avons dressé un bilan des informations que nous possédons.

Tout d'abord, le modèle éléments-finis linéaire utilisé pour la validation de la Source Laser de l'horloge atomique a été décrit. Dans ce modèle, la non linéarité, qui était déjà connue, a été contournée en remplaçant l'élastomère non linéaire par des ressorts linéaires dont la raideur a été adaptée pour faire apparaitre les mêmes fréquences propres que celles suspectées pour le niveau de qualification.

Ensuite, les résultats des essais vibratoires ont mis clairement en évidence la présence de la non linéarité, ainsi que son impact important sur les fréquences des premiers modes de la Source Laser, des modes de suspension. Ces effets n'ont, toutefois, pas été jugé critique et le projet *PHARAO* a pu suivre son cours. Toutefois, plusieurs études menées actuellement au *C.N.E.S.* tentent de prendre en compte ces non linéarités dans la modélisation afin de pouvoir estimer leur influence sur la structure étudiée, déjà, lors des phases de simulations numériques. C'est dans cette démarche que s'inscrit cette étude.

Immédiatement, il a pu être mis en évidence que la non linéarité mise en jeu ici est un comportement élastique non linéaire, à caractère adoucissant, de l'élastomère utilisé dans les amortisseurs supportant le banc optique. Ces observations étant en accord avec ce qu'il est connu du comportement dynamique des élastomères à savoir : une loi élastique adoucissante pour des déformations modérées, puis un comportement raidissant pour de grandes déformations.

Les objectifs de ce travail sont les suivants. Tout d'abord, sur base des données expérimentales décrivant la non linéarité, nous tâcherons de intégrer cette dernière au modèle éléments-finis déjà existant. Cela fait, la deuxième étape sera de simuler, à la lumière des conclusions tirées dans le chapitre 1, la réponse du modèle afin de connaitre les séries temporelles nécessaires au processus d'identification. Enfin, une méthode d'identification sera mise à l'épreuve, quant à la bonne évaluation de la non linéarité intégrée et, donc, connue.

La méthode d'identification utilisée a, enfin, été détaillée. Une base bibliographique est proposée et de nombreuses remarques pratiques, permettant d'améliorer la qualité de l'identification, ont été formulées. Nous avons également abordé les procédures d'intégration et de filtrage des signaux permettant à partir de la seule connaissance de l'accélération – qui est généralement la seule donnée disponible lors d'essais expérimentaux –, d'obtenir la vitesse et le déplacement correspondant.

Chapitre 3

Etude d'un amortisseur seul

3.1 Introduction

Après avoir pris en main le module d'intégration temporelle de *MSC.Nastran* et présenté le cadre dans lequel s'établit ce travail, nous pouvons entamer l'étude d'un amortisseur dans la même configuration que celle utilisée lors des essais. Nous nous concentrerons sur l'évolution du mode de suspension selon l'axe Z. En effet, les analyses modales ont montré que les modes selon X et Y font intervenir une déformation des pieds sur lesquels reposent les amortisseurs. Pour être représentatif, il serait donc nécessaire de prendre en compte la dyamique des pieds dans notre analyse ce qui complexifierait fortement le modèle.

La première section de ce chapitre aura pour but de décrire le modèle éléments-finis utilisé. Celui-ci se base fortement sur le modèle réalisé par *Mecano ID*, la principale différence étant l'introduction d'éléments non linéaires entre les parties internes et externes de l'amortisseur.

Nous détaillerons, ensuite, le choix des paramètres de calculs et d'intégrations. Celui-ci sera effectué à la lumière des conclusions tirées au Chapitre 1.

En débutant cette étude, nous n'avons aucune information précise concernant l'élastomère utilisé dans les suspensions. Il est, dès lors, nécessaire sur base des données que nous possédons, mais aussi de ce qui peut être trouvé dans la littérature d'estimer les propriétés du matériau et, en particulier, recaler sa loi d'élasticité $\sigma = f(\epsilon)$. Ce sera l'objet de la troisième section de ce chapitre.

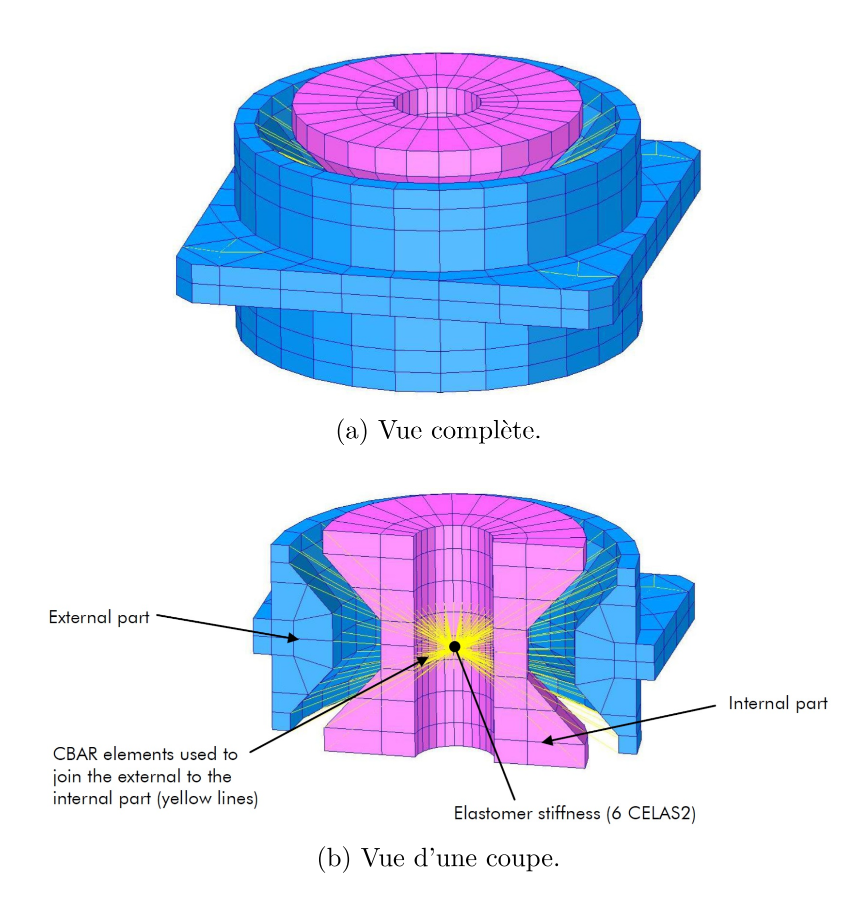
Une fois le modèle éléments-finis fin prêt, nous pourrons entamer l'étape d'identification. Nous simulerons, tout d'abord, le système dans des conditions optimales, puis appliquerons la méthode de la *Restoring Force Surface* présentée au chapitre précédent.

Enfin, nous comparerons le système identifié avec le modèle éléments-finis.

3.2 Modèle éléments-finis

Le modèle éléments-finis utilisé pour cette première étape est extrait du modèle réalisé par la société *Mecano ID* pour la Source Laser. Un des quatres amortisseurs est isolé et complété. En effet, comme l'illustre la Figure 3.1, rappelons que l'élastomère n'avait pas été représenté. Il avait été remplacé par une série de ressorts linéaires dont les raideurs permettaient d'avoir un premier mode selon Z à 140 Hz et selon XY à 156 Hz comme montraient les essais effectués par la société *GAMMA*, conceptrice de l'amortisseur.

Dans le cadre de notre étude, il est nécessaire de remplacer les ressorts par des éléments volumiques auxquels sera associée une loi de comportement non linéaire. En pratique, nous avons d'abord tracé le profil de la discrétisation en nous basant sur la discrétisation du modèle initial, sans insérer de nouveaux noeuds. Puis, grâce à une opération de révolution, l'entièreté de la couche a été créée. Elle peut être



(a) Vue complète.

(b) Vue d'une coupe.

FIGURE 3.1 – Modèle éléments-finis réalisé par la société *Mecano ID*. Il s'agit d'un modèle linéaire où la couche d'élastomère a été remplacée pas une série de ressorts (en jaune) dont les raideurs ont été adaptées de manière à positionner le premier mode de suspension selon Z à 140 Hz, ainsi que le premier selon X et Y à 156 Hz. Ce choix est basé sur les essais effectués par le concepteur de la suspension, la société *GAMMA*. On distingue très clairement les parties interne, ou noyay, (en rose) et externe ou corps, (en bleu) de l'amortisseur. Figure tirée de [28].

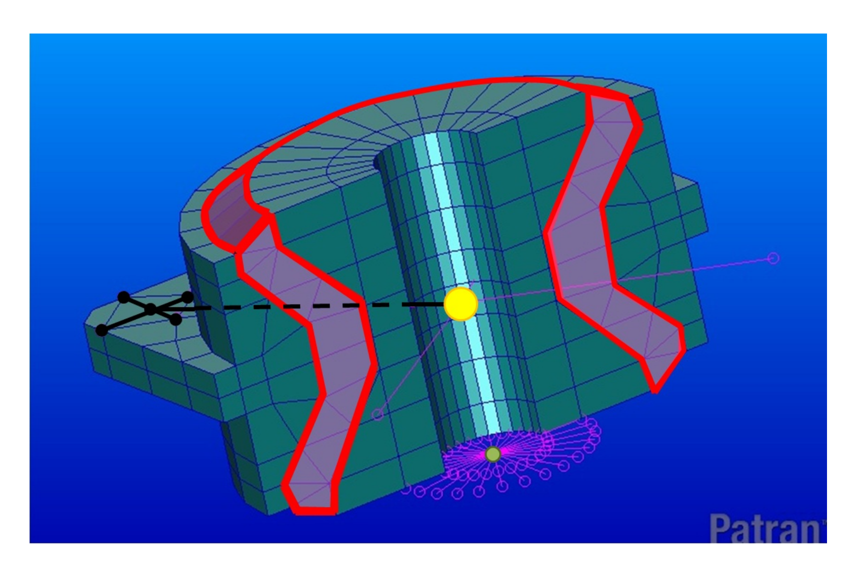


FIGURE 3.2 – Modèle éléments-finis de l'amortisseur réalisé pour cette étude. Les parties interne et externe de la suspension sont inchangées. La couche d'élastomère (en rose entourée de rouge) a été insérée. De plus, les conditions aux limites ont été adaptées. D'abord, la base de la partie interne – qui est fixée au pied du banc grâce à une longue vis centrale et une rondelle à la base – a été encastrée (rosace rose). Ensuite, les quatres coins de la partie externe – qui sont fixés au banc optique – sont reliés, par des éléments rigides (ligne noire) à une masse ponctuelle prafaitement centrée (point jaune) correspondant à 1/4 de la masse totale du banc optique, soit 2,629 kg.

Aluminium 6061 T6	
ρ [kg/m^3]	$3104,5$
E [MPa]	$69 \ . \ 10^9$
ν [-]	$0,33$
η [-]	$0,0005$

TABLE 3.1 – Propriétés de l'aluminium 6061 T6 constituant les parties interne et externe de l'amortisseur.

visualisée à la Figure 3.2. Le modèle comporte alors 1289 éléments – dont 392 correspondent à la couche d'élastomères – ce qui représente 1415 noeuds, soit 8490 degrés de liberté.

Les parties interne et externe de la suspension sont composées d'aluminium 6061 T6 dont les propriétés sont listées à la Table 3.1. Ces dernières seront, dès lors, définies, dans *MSC.Nastran* au moyen d'une simple carte `MAT1`. Rappelons que, lors de notre prise en main du module d'intégration temporelle, SOL 129, il a été souligné qu'il était préférable, pour des raisons de stabilités, d'introduire un amortissement, même très faible, pour tous les matériaux utilisés. C'est pourquoi nous n'oublierons pas d'introduire le coefficient d'amortissement structural de l'aluminium [1] dans la carte `MAT1`.

Les propriétés de la couche d'élastomère seront, quant à elle, définie par l'association d'une carte `MAT1` et `MATS1`. La carte `MAT1` contiendra le coefficient d'amortissement structural, le coefficient de Poisson, la masse volumique, mais aussi le module de Young utilisé pour la première itération. La loi de comportement $\sigma = f(\epsilon)$ de l'élastomère est définie par la carte `MATS1`.

Malheureusement, nos connaissances sur l'élastomère présent dans les amortisseurs sont très limitées

1. Valeur choisie sur base de ce qui est donné dans le logiciel *CES*.

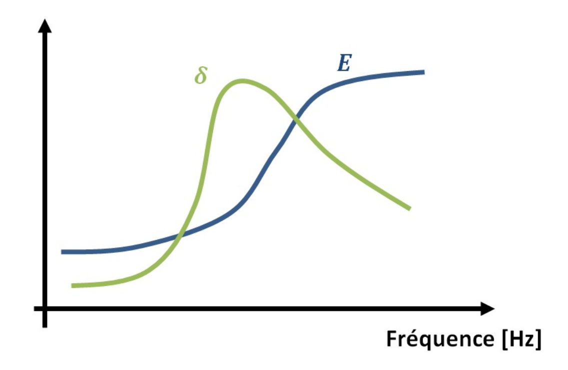


Figure 3.3 – Evolution du module de Young, E, et de l'angle de perte, δ, en fonction de la fréquence d'excitation.

et les valeurs de ces propriétés nous sont, à priori, inconnues. En effet, l'amortisseur a été conçu sur mesure pour répondre précisément aux exigences formulées dans le cahier des charges. Il s'agit d'un amortisseur "unique" dont les caractéristiques ne sont pas répertoriées dans un catalogue. Il sera donc nécessaire d'estimer, au mieux, ses propriétés.

La seule information dont nous disposons est que l'élastomère utilisé consiste en un mélange de deux élastomères à base de silicone : le SILASTIC 55U à 40% et le SILASTIC 75U à 60%. Alors qu'une fiche technique concernant le SILASTIC 55U est accessible, aucune donnée n'a pu être trouvée concernant le second, ni même concernant ce mélange.

En 2007, un essai de caractérisation des suspensions a été réalisé [7]. Ces essais consistaient, notamment, en l'extraction des courbes de raideurs statiques de l'amortisseur selon les trois directions. Pour ce faire, la partie externe de l'amortisseur est maintenue fixe, pendant qu'un effort est appliqué sur la partie interne. La loi Force-Déplacement est ensuite tracée et la raideur en N/m extraite. Néanmoins, ces essais témoignaient de comportement quasiment parfaitement linéaire pour des déplacements allant jusqu'à 1 mm, sachant que la couche d'élastomère possède une épaisseur d'environ 5 mm et qu'il est le seul à se déformer de manière non négligeable, cela correspond à des déformations relativement importantes. Le comportement non linéaire n'a donc pas pu être mis en évidence par ces essais et ils ne pourront être utilisés lors de notre recalage.

Ce phénomène est explicable par le fait que le module de Young, comme le coefficient d'amortissement, des élastomères est dépendant de la fréquence d'excitation [32]. Il est illustré à la Figure 3.3. Bien que les caractéristiques de chaque élastomère lui sont propres, tous suivent un comportement assez similaire. Un essai statique n'est donc pas représentatif du comportement dynamique.

Le logiciel *CES Selector* commercialisé par la société *Granta* propose une importante base de données de matériaux utilisés dans de nombreux domaines. Nous choisirons les propriétés du matériau élastomère qui nous occupe ici à partir des informations proposées par *CES Selector* concernant les élastomères à base de silicone. Le logiciel donne généralement une fourchette de valeurs pour chaque caractéristique. N'ayant à priori aucune piste pour le choix des propriétés, nous considèrerons des valeurs intermédiaires. Celles-ci sont synthétisées à la Table 3.2. Il est important de souligner ici que ce manque d'information pénalisera directement l'exactitude de la loi élastique recalée sur base des données résultant des essais expérimentaux. C'est pourquoi une connaissance, même approximative, de ces paramètres est fortement recommendée. Certains, comme la masse volumique, peuvent être très facilement estimées à condition d'avoir accès à un échantillon du matériau, ce qui, malheureusement, n'était pas notre cas.

Les matériaux ayant été défini, il nous reste à imposer les conditions aux limites du modèle. Rappelons que l'étude de l'amortisseur seul se base sur les résultats des essais réalisé par le constructeur *GAMMA* lors de la validation de sa suspension. A nouveau, nous n'avons pas d'informations précises concernant

Elastomère	
ρ [kg/m^3]	1200
ν [-]	$0,48$
η [-]	$0,1$

Table 3.2 – Propriétés de l'élastomère présent dans l'amortisseur. Il s'agit d'un mélange de deux élastomères à base de silicone. Ces propriétés ont été choisie à partir d'informations proposées par le logiciel *CES Selector* pour les élastomères à base de silicone.

les conditions dans lesquels l'amortisseur a été testé. Toutefois, il s'agirait d'une simplification du cas réel d'utilisation, l'influence du banc étant représentée par un lest parfaitement centré d'une masse égale à 1/4 de la masse totale du banc optique, soit 2,629 kg. Ce lest sera représenté par une masse ponctuelle parfaitement centrée, positionnée au centre de la partie interne de l'amortisseur, comme présenté par le point jaune sur la Figure 3.2.

L'encastrement, ainsi que les liaisons avec la masse ponctuelle ont été inspirée de la configuration réelle d'utilisation de l'amortisseur. Tout d'abord, la partie interne est fixée au pied au moyen d'une longue vis centrale. Comme nous nous concentrons sur le mode de suspension selon Z dans lequel les pieds ne subissent aucune déformation, la base du noyau sera encastrée. Notons, en outre, qu'une rondelle d'interface est également présente pour garantir une bonne adhésion entre le pied et l'amortisseur. C'est pourquoi seuls les noeuds de la base du noyau en contact avec cette rondelle seront effectivement encastrés. En pratique, nous n'encastrerons pas directement les noeuds, mais les lierons, via des éléments parfaitement rigides, à un noeud central qui, lui, sera encastré.

Le corps de l'amortisseur est, quant à lui, fixé au banc optique au moyen de quatre plus petites vis. Les quatre noeuds représentant ces dernières seront liés au moyen d'éléments parfaitement rigides, d'une part, à leurs premiers noeuds voisins – pour prendre en compte l'effet de la tête de vis – et, d'autre part, à la masse ponctuelle représentant le banc. L'ensemble de ces conditions sont représentées à la Figure 3.2.

Enfin, le module d'intégration temporelle SOL 129 utilisé pour les simulations ne permettant pas d'imposer une accélération en un noeud, il est nécessaire d'introduire une masse sismique de masse bien supérieure à celle du système étudié, liée au modèle par un ressort extrêmement raide. La masse sismique pourra être excitée en force et l'accélération résultante sera transmise au modèle. *MSC.Nastran* conseille que la masse de la masse sismique soit 10^6 fois supérieure à la masse totale du modèle. Dans notre cas, elle sera donc fixée à 10^6 kg. Le ressort, quant à lui, se doit d'être suffisamment raide. En nous référant à ce qui avait été réalisé pour une étude précédente [6], nous imposons une raideur de 10^{10} N/m. Afin de s'assurer que l'excitation sera bien uniquement dirigée selon l'axe Z, la masse sismique est contrainte à ne pouvoir se déplacer que dans cette même direction. De même, ses rotations sont empêchées.

L'observation du déplacement relatif entre la masse sismique et le noeud représentant la base de l'amortisseur indique, pour les excitations simulées, une valeur maximale d'environ 10^{-7}, ce qui est bien inférieur aux déplacements observés dans le modèle – qui sont de l'ordre de 10^{-4}. Les choix de la masse sismique et de la raideur du ressort d'excitation ne sont donc pas à remettre en question.

Le modèle ainsi réalisé a, enfin, été soumis aux tests de recette classique qui ont, tous, été passés avec succès. Pour rappel, ces critères ont été établis par le *C.N.E.S.* et, pour une étude dynamique, sont les suivants :

- *Test statique* : application d'un champ gravitationnel de 1g dans chaque direction et vérification de la loi de Newton au point d'encastrement ;

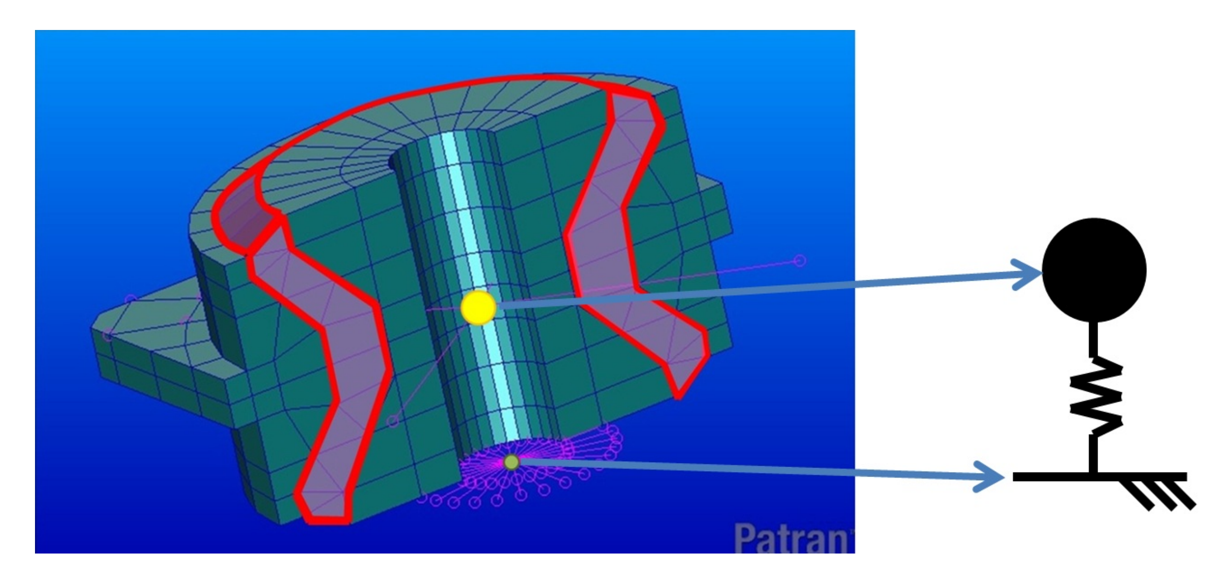


FIGURE 3.4 – Idéalisation du modèle éléments-finis complet en un système à un degré de liberté équivalent.

– *Premier test dynamique* : dans le cas libre-libre, vérification que :

$$\frac{\text{Fréquences des modes rigides}}{\text{Fréquence du premier mode souple}} < 10^{-4}$$

– *Second test dynamique* : dans le cas libre-libre, vérification que les énergies de déformation associées aux modes rigides est inférieures à 10^{-3} J :

$$\text{Strain Energy} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\phi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\phi}$$

où $\boldsymbol{\phi}$ sont les vecteurs propres correspondant aux modes rigides.

Ce système peut être idéalisé par un système équivalent à un seul degré de liberté. En effet, il est raisonnable de supposer que les parties internes et externes de l'amortisseur – cf. Figure 3.1 –, composées d'aluminium et donc de fréquences propres très élevées, restent rigides sur la plage de fréquences étudiée. La déformation n'a, donc, lieu que dans l'élastomère. Cela implique que nous pouvons idéaliser le noyau comme un premier degré de liberté et le corps, auquel est liée rigidement la masse ponctuelle représentant le banc, comme un second. Le premier représentera la base et sera soumis à l'excitation. En étudiant les déplacements et vitesses relatifs, le système sera réduit à un degré de liberté que nous pourrons identifier avec la méthode de la *Restoring Force Surface*.

La Figure 3.4 présente l'idéalisation à un degré liberté du modèle éléments-finis simulé. La masse ponctuelle représentant le banc optique ainsi que la partie externe de l'amortisseur sont fusionnées en un noeud unique. De même, la partie interne sera simplifiée en un noeud. Le comportement de l'élastomère sera, quant à lui, associé par la méthode d'identification à un ensemble ressorts/amortisseurs liant les deux noeuds.

3.3 Paramètres de calculs

Nous décrirons dans cette section tous les paramètres de calculs utilisés pour les simulations futures. Les paramètres d'intégration ont été choisis à la lumière des conclusions tirées au Chapitre 1. Le système sera simulé au moyen du module d'intégration temporelle de *MSC.Nastran*, SOL 129. Nous soulignerons également le choix d'autres paramètres de calculs tels que la considération de grandes déformations.

3.3.1 Paramètres d'intégration

Comme nous l'avions souligné au premier chapitre de ce travail, la règle de bonne pratique, quant au choix du pas de temps à utiliser, est d'imposer, au minimum le calcul de 20 à 30 points par période de réponse. Notre but ici étant d'exciter principalement le premier mode selon Z de la structure, nous nous attendons à une réponse qui, en fonction du niveau d'excitation, aura un contenu fréquentiel compris entre 140 et 210 Hz. Le cas le plus critique nécessitera donc un pas de temps d'environ :

$$\mathrm{dt} \cong \frac{1}{30}\frac{1}{210} = 1,5873\ .\ 10^{-4}\ \mathrm{s}$$

Le pas de temps sera, dès lors, fixé à 10^{-4} s pour l'ensemble des simulations. Au vu de la taille du modèle et des temps de calculs observés, il est difficile de, raisonnablement, réduire ce pas de temps. L'algorithme d'adaptation automatique du pas de temps a été désactivé. Par contre, l'algorithme de bissection a été autorisé, de manière à pouvoir surmonter l'un ou l'autre problème de convergence. Jusqu'à neuf bissections sont autorisées.

Compte tenu des difficultés et des instabilités dont est sujette la SOL 129, nous introduirons, par sécurité, un léger amortissement numérique de 5%. Rappelons que *MSC.Nastran* conseille un amortissement numérique compris entre 2,5% et 10%.

Suite aux simulations du Chapitre 1, nous avions pu mettre en évidence l'importance du critère de convergence basé sur la variation de déplacement U. Ce dernier sera, dès lors, l'unique critère choisi et la tolérance associée est fixée à 10^{-9}. Il s'agit d'une tolérance très proche de la tolérance limite avant que de sérieux problèmes de convergence ne surviennent et ne nécessitent une réduction du pas de temps.

La liste complète des paramètres d'intégrations utilisés sont synthétisés à la Table 3.3. Il s'agit des paramètres demandés pas la carte `TSTEPNL`.

3.3.2 Prise en compte de grandes déformations

Comme nous le verrons, les simulations effectuées feront apparaitre des taux de déformation jusqu'aux environs de 20%. D'après la documentation de *MSC.Nastran*, au-delà de cette valeur, les procédures de la théorie des grandes déformations doivent être considérées. Le paramètre `LGDISP` sera donc imposé à la valeur 1, par sécurité. Ce choix reste discutable car nous n'entrerons pas clairement dans le domaine des grandes déformations – par là, nous entendons des déformations de l'ordre 50 ou 100% où ces procédures sont absolument nécessaires. Cependant, par sécurité, ces procédures seront activées, d'autant plus que le coût supplémentaire en temps de calcul reste acceptable.

Nous n'entrerons pas ici dans les détails théoriques de ces méthodes. Soulignons simplement qu'elles se basent sur la théorie des milieux continus. Le lecteur intéressé pourra se tourner vers le *Handbook for Nonlinear Analysis* de *MSC.Nastran* [29].

3.4 Recalage de la loi élastique non linéaire

La première étape de cette étude consiste à déterminer la loi de comportement élastique non linéaire $\sigma = f(\epsilon)$ du matériau élastomère présent dans l'amortisseur. A priori, nous n'avons aucune information concernant de cette loi, ni même une estimation de son module de Young à très faible déformation. Le recalage sera effectué sur base des données expérimentales, à savoir, l'évolution de la fréquence de résonance du mode selon Z en fonction du niveau d'excitation aléatoire. Celles-ci sont rappelées à la Table 3.4.

Nous travaillerons par essai-erreur. Ainsi, la loi matériau sera construite point par point par un procédé d'estimation/correction. Partant d'un niveau d'excitation très faible, nous estimerons une première partie

Paramètres d'intégrations	
dt [s]	10^{-4}
Critère	Variation de déplacement (U)
Tolérance	10^{-9}
Number of converged bisection between stiffness updates	1
Limit on number of iterations for each time step	50
Limit on the number of diverging conditions before assuming divergence	2
Maximum number of quasi-Newton correction vectors to be saved	10
Maximum number of line searches per iteration	2
Fraction of effective stress used to limit the subincrement size in the material routine	$0,2$
Maximum number of bisections allowed	9
Time step skip factor for automatic time step adjustment	0
Number of steps to obtain the dominant period response	40
Define bounds for maintainint the same time step for the stepping function during the adaptative process	$0,6$
Maximum ratio for the adjusted incremental time relative to the time step allowed	32
Tolerance on displacement increment below which a special provision is made for numerical stability	$0,1$
Maximum value of incremental rotation allowed per iteration to activate bisection	20

Table 3.3 – Paramètres d'intégration utilisés pour les simulations temporelles liées à l'étude de l'amortisseur seul.

Direction	Niveau d'excitation					
	0 dB	**-3 dB**	**-6 dB**	**-9 dB**	**-12 dB**	**RFR**
Amortisseur seul Z	140	146	156	166	174	211

TABLE 3.4 – Fréquences [Hz] de résonance de l'amortisseur seul mesurées les d'essais expérimentaux par le constructeur *GAMMA*. L'amortisseur est sujet à 1/4 de la masse du banc optique.

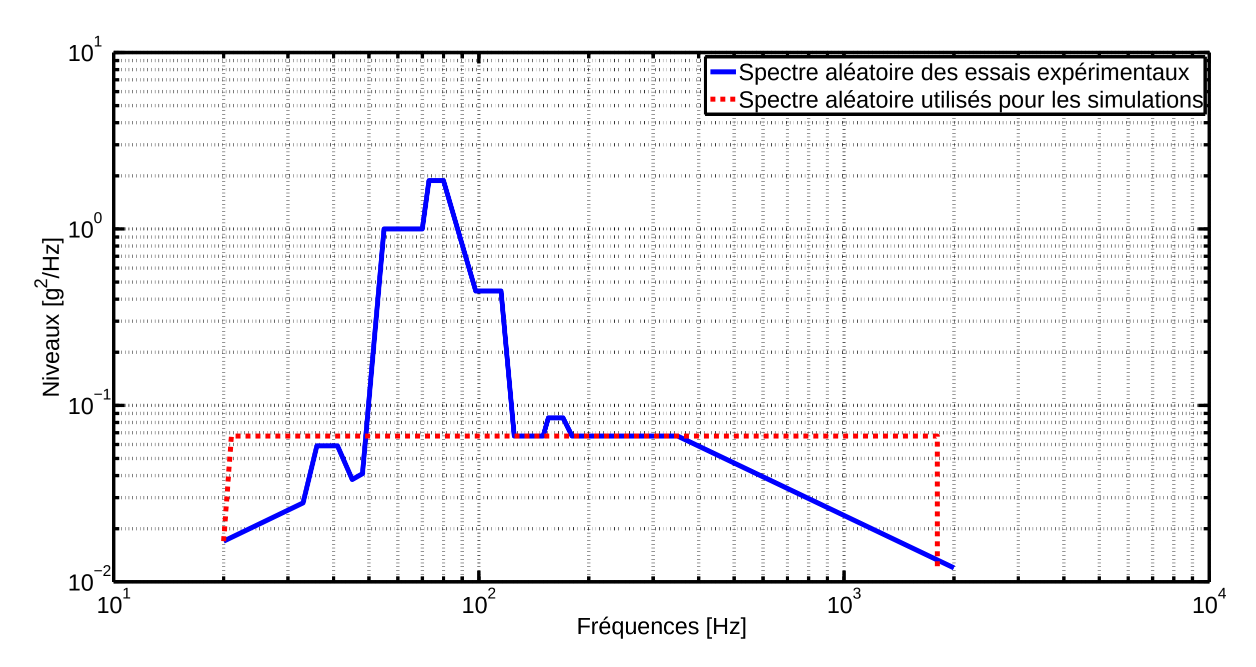


FIGURE 3.5 – Spectre fréquentiel du niveau de qualification à 0 dB. En bleu : spectre utilisé lors des essais expérimentaux. En rouge : spectre adapté pour nos simulations.

de la courbe. Le système sera ensuite simulé et la composante fréquentielle dominante de la réponse sera calculée. Sur base de cette dernière la loi sera adaptée jusqu'à une bonne correspondance avec les essais expérimentaux. L'erreur admise sur la fréquence a été fixée à 5%.

Il est important de noter que, pour assurer une certaine continuité de pente dans la loi élastique, celle-ci sera construite comme une interpolation cubique des points estimés au fil du recalage. D'autre part, nous veillerons à conserver une pente décroissante sur l'ensemble de la loi recalée. En effet, l'interpolation cubique peut générer quelques soubresauts qui sont à éviter.

3.4.1 Définition des excitations

Les excitations aléatoires appliquées lors de cette étape ont été générée sur base de celles réellement utilisées lors des essais. Ces dernières sont décrites dans la description des essais mécaniques et thermiques de la Source Laser de *PHARAO* [8]. La Table 3.5 et la Figure 3.5 présente le spectre fréquentiel du niveau de qualification, à 0 dB. Sur ce graphe est aussi présenté le spectre utilisé pour la génération des excitations aléatoires qui seront appliquées lors des simulations.

Ce spectre a été évalué de manière à avoir le même niveau global, i.e. 10,92 gRMS, et, surtout, un niveau très proche sur la plage de fréquence qui nous intéresse, à savoir entre 140 et 210 Hz. Il présente l'avantage d'être constant sur la plage 21–1800 Hz et donc peut être facilement généré grâce à *MATLAB* avec une grande précision.

Les niveaux intermédiaires à -3, -6, -9 et -12 dB sont, quant à eux, générés sur base du même spectre fréquentiel, mais dont le niveau global est divisé par $\sqrt{2}$ pour chaque réduction de 3 dB. La Table 3.6 liste

Fréquence [Hz]	**Niveau** [g^2/Hz]
20	0,017
33	0,028
36	0,059
41	0,059
45	0,038
48	0,041
55	1
70	1
73	1,88
80	1,88
98	0,445
115	0,445
125	0,067
150	0,067
155	0,085
170	0,085
180	0,067
350	0,067
2000	0,012
Niveau global	10,92 gRMS

Table 3.5 – Spectre fréquentiel du niveau de qualification à 0 dB. Valeurs tirées de [8].

Niveau	**Valeur gRMS** [gRMS]
Très bas ("RFR")	0,3536
-12 dB	2,73
-9 dB	3,8608
-6 dB	5,46
-3 dB	7,7216
0 dB	10,92

Table 3.6 – Valeurs gRMS associées à chaque niveau d'exciation aléatoire.

les valeurs gRMS associées à chaque niveau aléatoire. Notons que, pour également saisir correctement la fréquence de résonance de 211 Hz mise en évidence par l'excitation RFR, une excitation aléatoire de niveau équivalent a été générée.

Enfin, soulignons que, afin de récolter suffisamment d'informations et, en particulier, de laisser le premier mode apparaitre de manière évidente, les excitations aléatoires seront appliquées durant 3 secondes.

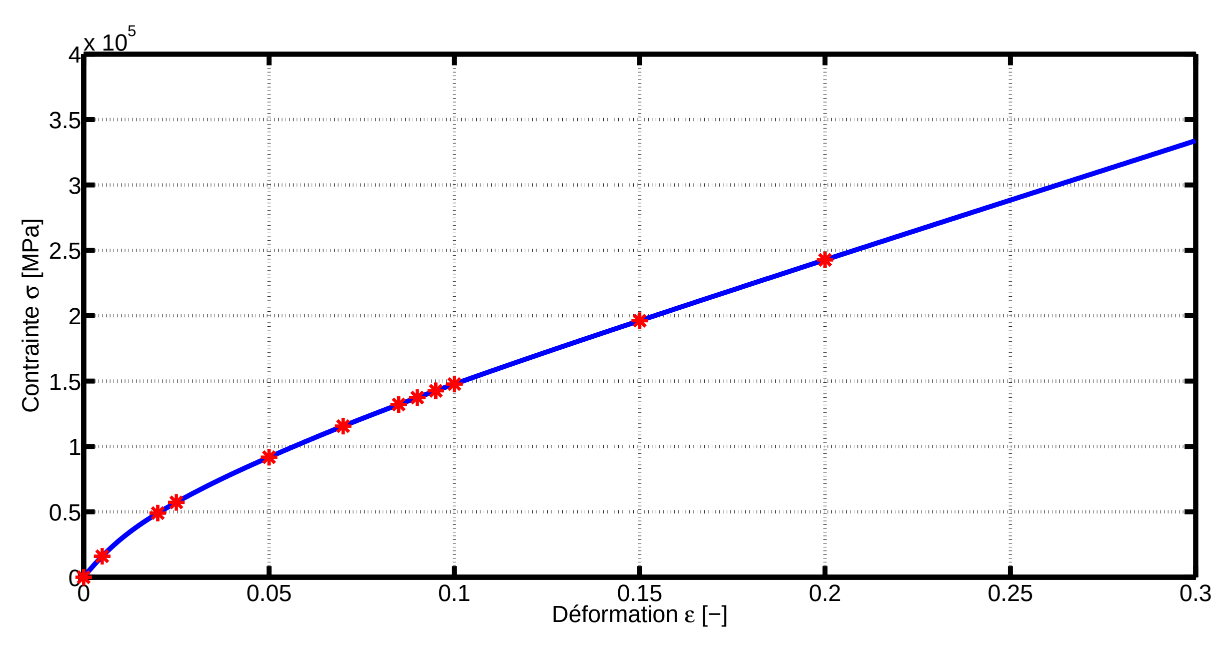
3.4.2 Loi élastique recalée et corrélations

La loi élastique non linéaire recalée, ainsi que l'évolution du module de Young en fonction de la déformation sont présentées aux Figures 3.6a et 3.6b, respectivement, tandis que les fréquences obtenues pour chaque niveau grâce à cette loi sont listées à la Table 3.7. On remarque que, comme nous l'avions supposé, il s'agit bien d'une loi de type adoucissante. La corrélation entre les fréquences constatées expérimentalement et les fréquences résultant des simulations est très bonne et satisfait à notre objectif des 5% d'erreur. Notons que, sur base des données expérimentales disponibles, la loi n'a pu être identifiée que jusqu'aux déformations d'environ 30 à 40%. Au delà, elle n'est pas connue et ne peut être recalée. En effet, dans un cas comme celui-ci, *MSC.Nastran* extrapole linéairement la loi élastique à partir des deux derniers points définis. C'est pourquoi, il est important que le reste des simulations effectuées restent dans cette plage de déformation. Une simulation impliquant des déformations plus importantes mènera à une réponse dénudée de sens.

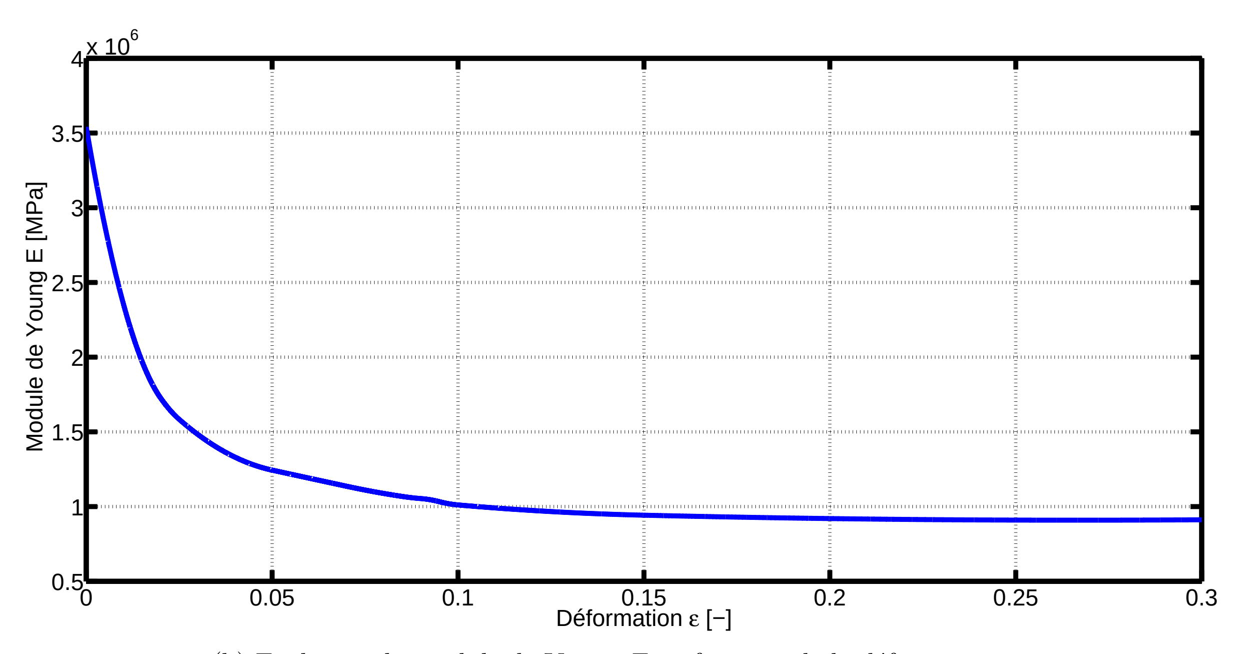
Ces résultats sont confortant. Cependant, soulignons que le coefficient d'amortissement du matériau n'est pas connu de manière précise et a, dès lors, été estimé à partir des données proposées par le logiciel *CES Selector* pour les élastomères à base de silicone. Or, les propriétés d'amortissement ont un impact, d'une part, sur les niveaux observés, mais aussi, sur la fréquence de résonance du système. De même, la masse volumique de l'élastomère a un effet direct sur celles-ci. C'est pourquoi la qualité de cette loi reste discutable. L'idéal aurait été d'avoir plus d'informations concernant l'élastomère utilisé ainsi que sur ses propriétés dynamiques.

3.5 Simulations en vue de l'identification

Le modèle éléments-finis réalisé et vérifié et la loi élastique recalée à partir des données expérimentales, nous pouvons entamer le processus d'identification. Nous commencerons par rappeler que la qualité de l'identification au moyen de la *Restoring Force Surface* dépend fortement du caractère plus ou moins uniforme de la couverture de l'espace d'état $(\mathbf{q},\ \dot{\mathbf{q}})$. En effet, une surface de *Crawley & O'Donnell* "trouée" témoignera d'une mauvaise couverture et rendra la perception de la non linéarité difficile. Tandis qu'une surface correctement définie favorisera le processus.



(a) Loi élastique non linéaire $\sigma = f(\epsilon)$ recalée pour le matériau élastomère présent dans l'amortisseur. En rouge : ensemble des points ajustés lors du processus. En bleu : interpolation cubique des points ajustés.



(b) Evolution du module de Young E en fonction de la déformation ϵ.

FIGURE 3.6 – Recalage de la loi élastique non linéaire de l'élastomère.

Niveau	**Fréquences expérimentales** [Hz]	**Fréquences calculées** [Hz]	**Erreur relative** [%]
Très bas ("RFR")	211	205,69	2,5
-12 dB	176	175,78	1,02
-9 dB	166	162,35	2,20
-6 dB	156	158,08	1,33
-3 dB	146	146,48	0,33
0 dB	140	136,72	2,34

TABLE 3.7 – Comparaison entre les fréquences identifiées de manière expérimentales et celles calculées numériquement. Les erreurs relatives commises sont inférieures à notre objectif de 5%.

Des excitations particulières et complexes à mettre en oeuvre ont été développées [5] de manière à garantir un balayage uniforme et optimal de l'espace d'état. Toutefois, parmi les excitations classiques, le sinus balayé permet d'obtenir les meilleurs résultats, tout en restant très simple à générer que ce soit numériquement ou en pratique. C'est, dès lors, vers ce choix que nous nous tournerons. Soulignons que l'excitation consistera, comme lors d'essais expérimentaux, en une accélération imposée à la base du système.

Une plage s'étalant de 120 à 180 Hz sera balayée à une vitesse de 4 octaves par minute, ce qui correspond à une excitation longue de 8,7744 s. Notre but étant de balayer de manière optimale l'espace d'état, mais aussi, de parcourir une grande partie de la loi élastique recalée, le sinus balayé sera descendant. En effet, pour une non linéarité adoucissante telle que celle présente ici, le pic de l'amplitude de la FRF $|H(\omega)|$ symbolisant le mode penche vers la gauche, à un tel point que l'on peut distinguer trois branches, une branche supérieure, une branche inférieure et une branche instable. La branche instable ne peut être atteinte, sauf dans des conditions très particulières, et on observe un phénomène de saut d'une branche stable à l'autre, entrainant une augmentation ou une réduction brusque du niveau de réponse, au moment de la bifurcation. Le sens de balayage – montant ou descendant – va influencer le parcours du mode, comme le présente la Figure 3.7. Pour couvrir une partie plus large de l'espace d'état, il est donc préférable de considérer un balayage descendant, qui mène également à une bien meilleure perception de la fréquence de résonance, le saut se produisant plus tard.

Cependant, la position du saut dépend des conditions d'excitation. En effet, il peut se produire plus ou moins tôt en fonction du type d'excitation et, dans notre cas, de la vitesse de balayage. Une vitesse de balayage très faible permettant de suivre plus longtemps la branche avant que le saut ne se produise.

Rappelons néanmoins que notre but ici n'est pas de suivre la branche supérieure sur une longue période. En effet, notre intérêt premier est de couvrir de la manière la plus homogène possible l'ensemble de l'espace d'état, tout en parcourant l'ensemble de notre loi élastique non linéaire. Pour ce deuxième objectif, nous comparerons les déplacements maximums observés lors des excitations aléatoires – qui, manifestement, se sont produit pour le niveau le plus élevé, à savoir celui de qualification à 0 dB – à ceux constatés tout au long de l'excitation CHIRP. L'amplitude de cette dernière sera, dès lors, adaptée pour obtenir des déplacements similaires. La Figure 3.8 compare les déplacements observés pour l'excitation aléatoire à 0 dB d'une part et d'autre part pour l'excitation sinus balayé.

La représentation de l'accélération calculée en fonction de la fréquence d'excitation dans le cas du sinus balayé est illustrée à la Figure 3.9. La présence du phénomène de saut est ici bien visible, ce qui témoigne

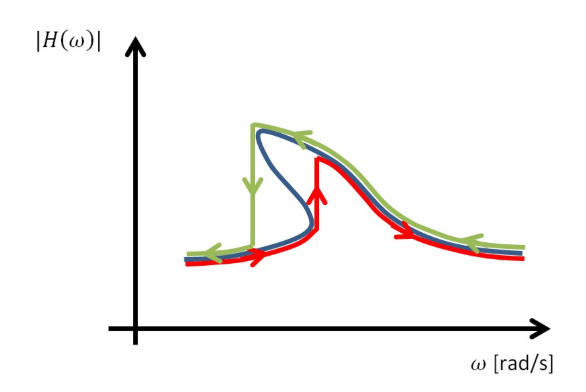


FIGURE 3.7 – Déformation du pic due à la présence d'une non linéarité adoucissante et phénomène de saut rencontré lors du parcours des deux branches stables – la branche supérieure et la branche inférieure. Afin de récolter un maximum d'informations et de couvrir au mieux l'espace d'état, nous nous tournerons vers une excitation CHIRP descendante, dont l'amplitude aura été adaptée pour ne pas induire des déformations supérieures à celles qui ont été observées pour le recalage.

directement d'un comportement non linéaire. On remarque également que ce saut se produit aux environs de 130 Hz qui est légèrement inférieur à la fréquence de résonance de 136 Hz observée pour l'excitation aléatoire. Cette différence s'explique par le fait que l'excitation en sinus balayé est sensiblement plus éprouvante que l'excitation aléatoire.

L'avantage de notre cas d'étude est que nous avons directement accès à tous les signaux : accélération, vitesse et déplacement – la force appliquée étant nulle, vu que l'excitation consiste en une accélération imposée à la base du système. Il n'est, dès lors, pas nécessaire de procéder à quelconque intégration et filtrage de signaux. Cependant, il est important de garder ces procédures à l'esprit. En effet, lors d'essais expérimentaux, généralement, seuls les signaux d'excitation et d'accélération sont disponibles. De plus, nos signaux sont dénudés de bruit, qui est inévitable lors de la prise de mesures expérimentales. Nous nous trouvons donc dans des conditions optimales pour l'identification.

3.6 Procédure d'identification

3.6.1 Préparation des données nécessaires

La première étape avant l'application de la méthode de la *Restoring Force Surface* est de récolter les signaux et données nécessaires à savoir :

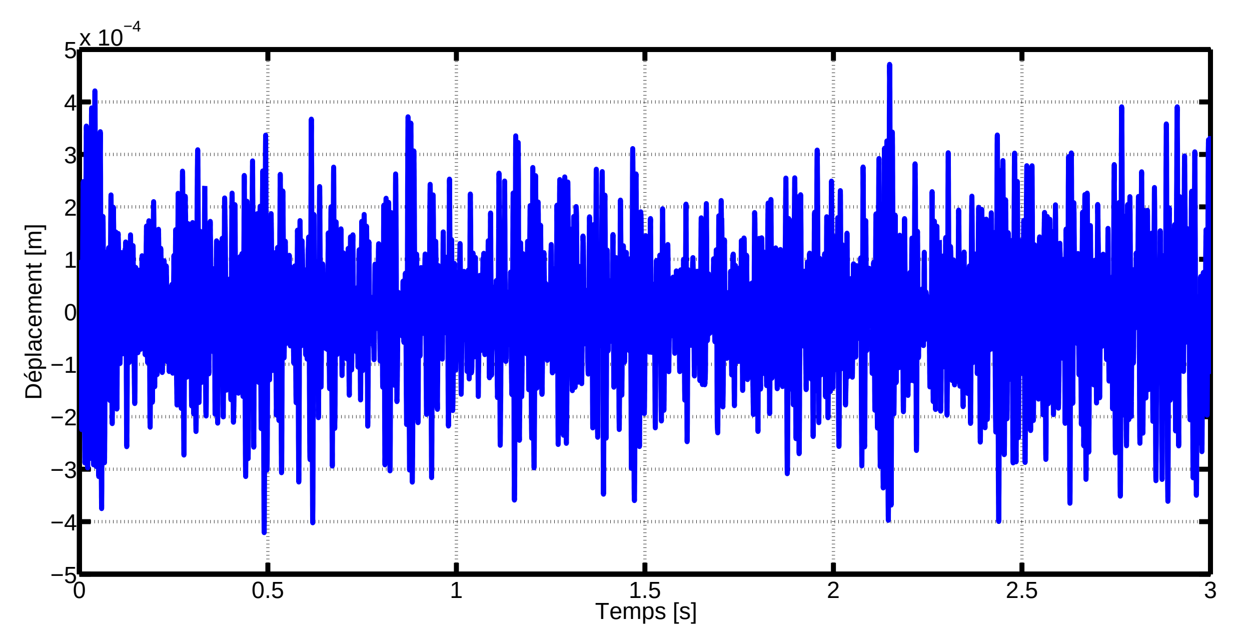
- la masse du degré de liberté observé ;
- son déplacement ;
- sa vitesse ;
- son accélération ;
- la force qui lui est appliquée.

Dans le cas d'un système linéaire à un degré de liberté excité par la base, illustré à la Figure 3.10, comme c'est le cas ici, l'équation du mouvement s'écrit :

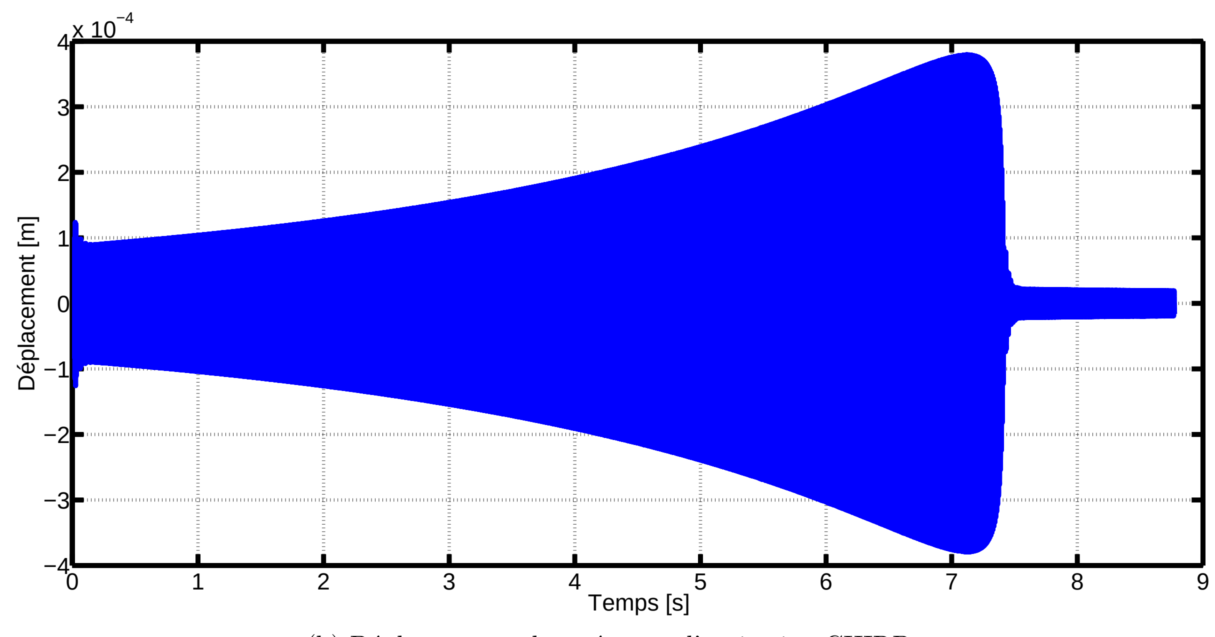
$$m\ddot{x} + c\left(\dot{x} - \dot{y}\right) + k\left(x - y\right) = 0$$

où x est le mouvement du degré de liberté et y le déplacement du sol. Dès lors, les signaux utilisés pour l'identification devront être :

- En guise d'accélération, l'accélération du degré de liberté observé $\ddot{x}$;
- En guise de vitesse, la différence des vitesses entre le degré de liberté observé et la base $(\dot{x} - \dot{y})$;
- En guide de déplacement, la différence des déplacements entre le degré de liberté observé et la base $(x - y)$.



(a) Déplacements observés pour l'excitation aléatoire à 0 dB.



(b) Déplacements observés pour l'excitation CHIRP.

FIGURE 3.8 – Les déplacements sont comparables pour les deux excitations. La loi élastique non linéaire est donc balayée de la même manière dans les deux cas.

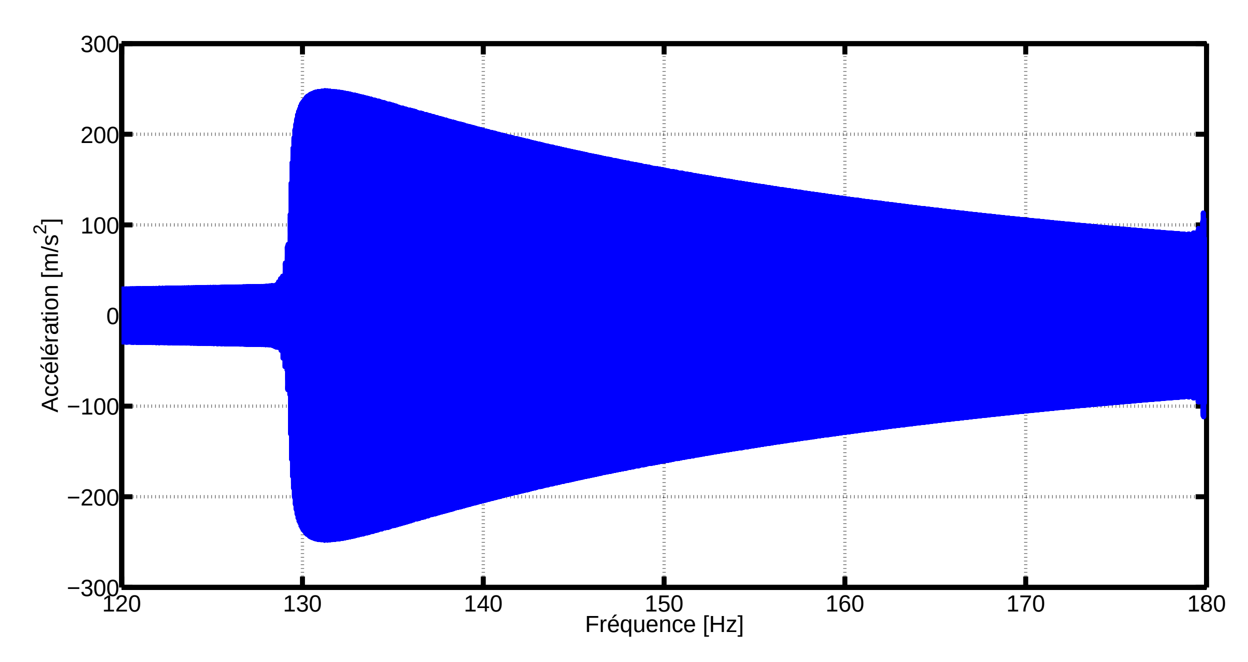


FIGURE 3.9 – Accélération en fonction de la fréquence d'excitation dans le cas du sinus balayé. Le saut se produit aux alentours de 130 Hz, soit un peu en-deçà de la fréquence de 136 Hz recalée dans la section précédente. Ceci peut s'expliquer par le fait que l'excitation CHIRP est sensiblement plus éprouvante que l'excitation aléatoire.

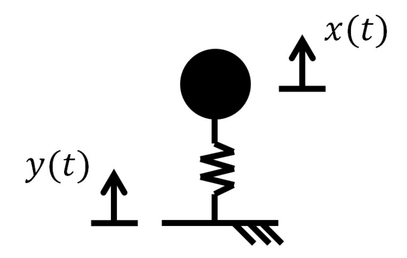


FIGURE 3.10 – Schéma d'un système à un degré de liberté excité par la base.

La force appliquée est, quant à elle, nulle.

En transposant ces conclusions à notre système où le degré de liberté observé est le noeud représentant le banc optique et le sol le noeud situé à la base de la partie centrale, comme nous l'avions présenté à la Figure 3.4. La masse associée au degré de liberté sera, quant à elle, estimée à la masse ponctuelle du banc optique, soit 2,629 kg, à laquelle s'ajoute la masse de la partie externe de l'amortisseur, 0,04 kg. Cette dernière a pu être estimée grâce au modèle éléments-finis. Nous devrions également prendre en compte une partie de la masse de l'élastomère. Cependant, celle-ci est très difficile à évaluer. Heureusement, vu la faible masse volumique de l'élastomère, elle sera clairement négligeable par rapport à la masse ponctuelle.

3.6.2 Application de la *Restoring Force Surface*

Estimation préliminaire du modèle mathématique

L'application de la *Restoring Force Surface* est une étape très directe, pour laquelle la principale difficulté est d'estimer avec le plus de cohérence possible de modèle mathématique à partir duquel l'identification sera réalisée. Le reste n'est, en effet, que des calculs simples à réaliser au moyen de *MATLAB* sur lesquels l'utilisateur n'a pas un grand contrôle.

Le choix du modèle mathématique est, en effet, l'étape critique de l'identification. Pour nous aider dans

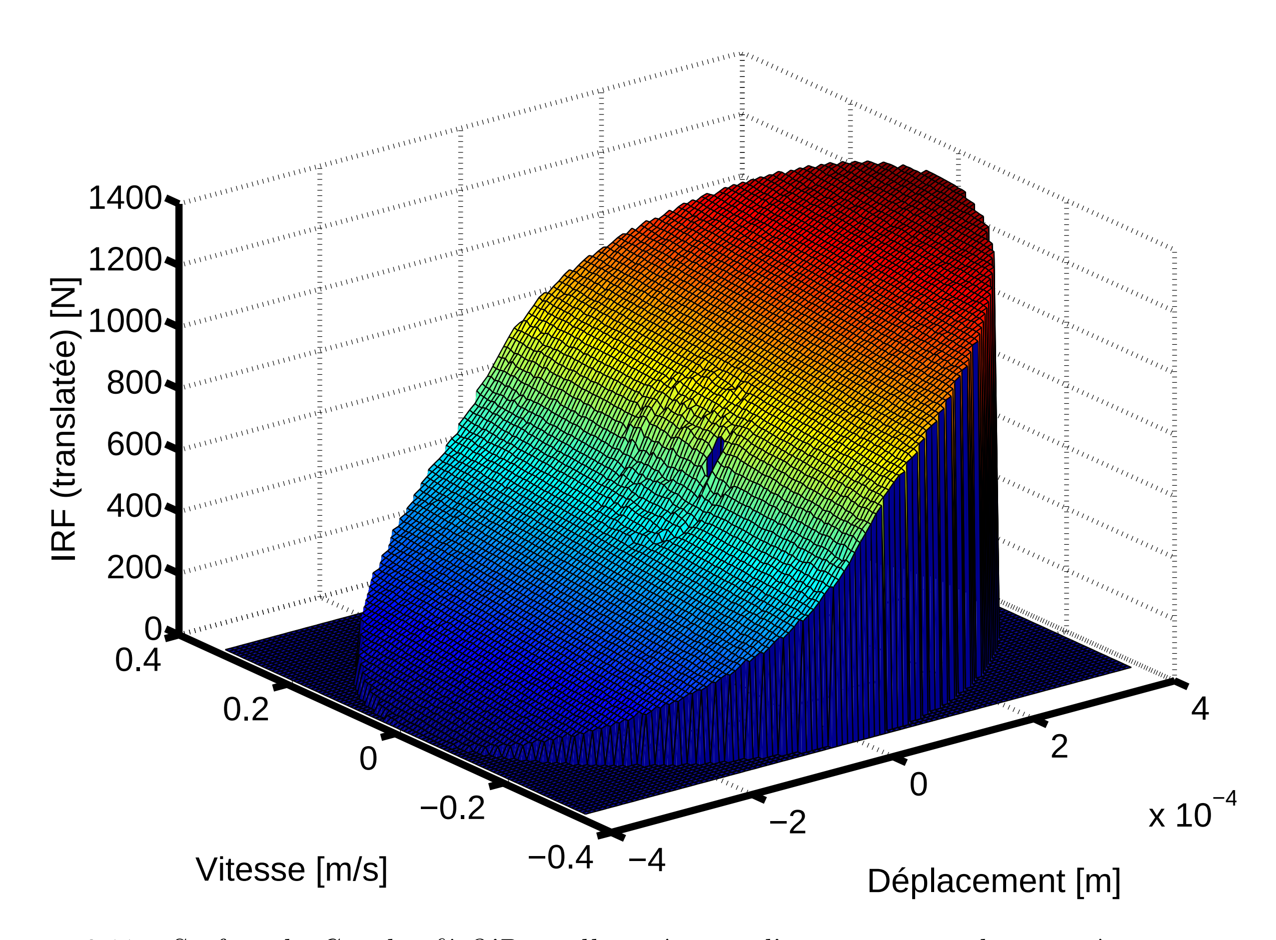


FIGURE 3.11 – Surface de *Crawley & O'Donnell* tracée pour l'amortisseur seul soumis à une excitation CHIRP descendante entre 180 et 120 Hz. Grâce à l'excitation CHIRP, la surface n'est pas trouée, même si quelques imprécisions sont présentes au centre. On remarque directement le comportement non linéaire adoucissant en fonction du déplacement. Cette surface nous pousse donc à considérer un amortissement linéaire et une raideur non linéaire.

cette étape, la surface de *Crawley & O'Donnell* est un élément clé. La surface obtenue pour l'excitation CHIRP est présentée à la Figure 3.11. On y voit clairement apparaitre un comportement non linéaire à caractère adoucissant en fonction du déplacement et un comportement linéaire selon la vitesse. La Figure 3.12 montre la courbe de raideur. Malgré un léger manque de points pour de très faibles déplacements, ce graphe confirme nos observations pour la surface de *Crawley & O'Donnell*. De plus, grâce aux points pour de très faibles déplacements, on peut estimer la valeur de la raideur linéaire présente : $1\ 10^7$ N/m. Sur base de ces constatations, le modèle mathématique représentant la force interne du système sera linéaire en la vitesse et non linéaire en le déplacement.

Lors de l'identification, deux motivations peuvent être distinguées. La première consiste à trouver le meilleur modèle et le meilleur ensemble de paramètre permettant de minimiser l'erreur commise, ce au risque de trouver des paramètres qui ne sont pas physiques – comme une raideur linéaire négative par exemple. La seconde consiste à trouver un modèle permettant de minimiser l'erreur commise tout en conservant un modèle physique et rationnel au risque d'avoir une erreur sensiblement plus élevée que dans la première démarche. L'inconvénient de la première est qu'elle ne permettra de représenter correctement que le comportement utilisé pour l'identification. Une simulation du modèle identifié pour d'autres excitations ne sera probablement pas correcte. Dès lors, pour garantir une certaine confiance, nous nous tournerons vers la seconde motivation.

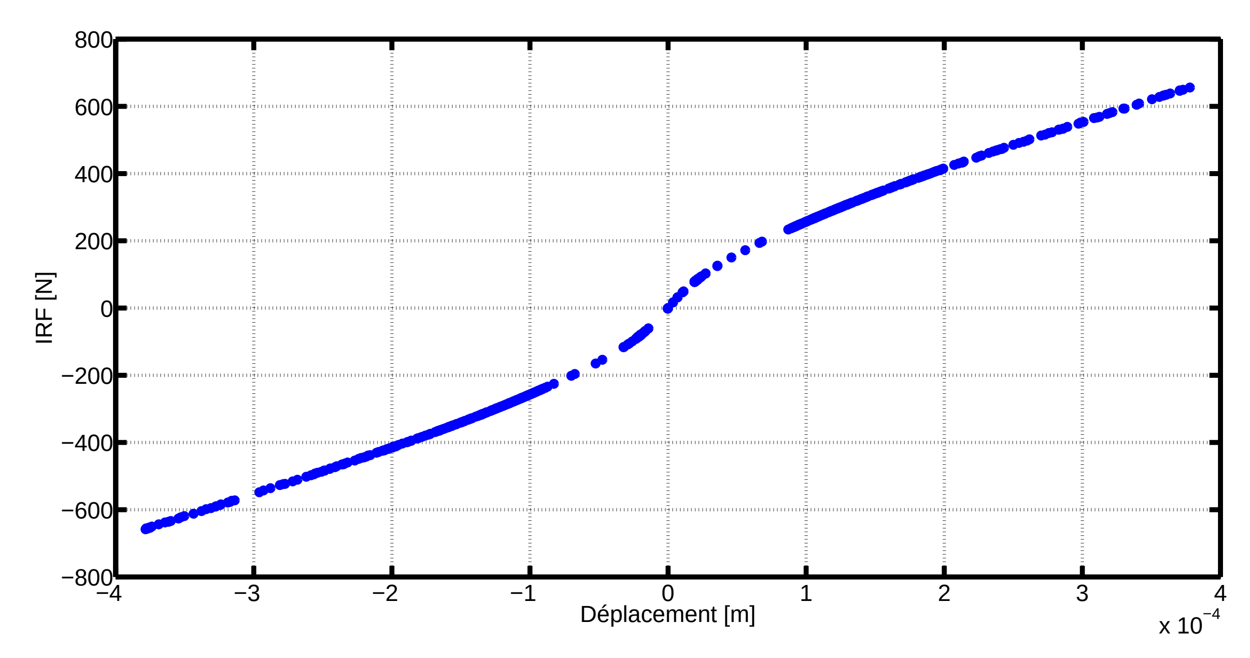


FIGURE 3.12 – Courbe de raideur – i.e. force interne en fonction du déplacement pour une vitesse nulle (à une certaine tolérance près) – tracée pour l'amortisseur seul soumis à une excitation CHIRP descendante entre 180 et 120 Hz. La présence d'une raideur non linéaire apparait très clairement.

Première identification

Pour confirmer les hypothèses faites sur base de la surface de *Crawley & O'Donnell*, nous effectuerons une première identification du système sur base d'un modèle mathématique générique de la forme :

$$\hat{\mathbf{f}} = \alpha_{10}\mathbf{q} + \alpha_{01}\dot{\mathbf{q}} + \alpha_{20}\text{sign}\left(\mathbf{q}^2\right) + \alpha_{02}\text{sign}\left(\dot{\mathbf{q}}^2\right) + \alpha_{30}\mathbf{q}^3 + \alpha_{03}\dot{\mathbf{q}}^3$$

Les facteurs d'importances nous permettront de déterminer lesquels des coefficients α_{ij} estimés sont influents et lesquels peuvent être écartés. L'identification sera effectuée sur la quasi-entièreté des signaux calculés pour l'excitation CHIRP, seule la partie transitoire sera évincée.

Les coefficients α_{ij} ainsi que les facteurs d'importances correspondants sont synthétisés à la Table 3.8. On remarque la grande influence des paramètres de raideur. Notons à ce propos que le coefficient α_{20} est positif, tandis que le coefficient α_{30} est négatif. En d'autre mots, la raideur d'ordre 2 adoucissante est raidie par une raideur cubique. Ce résultat nous pousse à penser que l'exposant non linéaire de raideur n'a pas été choisi correctement. Le coefficient de raideur linéaire, égal à $3,4\ 10^6$ N/m est, quant à lui, bien inférieur à celui estimé sur la courbe de raideur – $1\ 10^7$ [N/m]. Enfin, les coefficients d'amortissements ont d'une manière générale une très faible influence sur la réponse. Cependant, nous savons qu'un amortissement est présent dans le modèle et qu'il ne serait pas physique de ne pas considérer d'amortissement. C'est pourquoi nous conserverons le coefficient d'amortissement linéaire.

En comparant les valeurs des facteurs d'importance et en tâchant de réaliser une identification rationnelle, nous conserverons les coefficients des raideurs linéaire, carrée et cubique, ainsi que celui d'amortissement linéaire. L'erreur *MSE* commise avec ce modèle sur la force interne n'est que de 0,07%, ce qui témoigne d'une corrélation excellente. Une comparaison entre la force interne simulée par *MSC.Nastran* et celle identifiée est présentée à la Figure 3.13.

Bien que la corrélation soit excellente, nous avons pu remarquer que le modèle mathématique n'est pas réellement adapté et rationnel. En effet, la raideur carrée adoucissante compensée par une raideur cubique raidissante est un comportement que nous aimerions éviter en déterminant un exposant i, s'appliquant sur le déplacement, plus adapté.

	α_{10} $[N/m]$	α_{20} $[N/m^2]$	α_{30} $[N/m^3]$	α_{01} $[Ns/m]$	α_{02} $[Ns^2/m^2]$	α_{03} $[Ns^3/m^3]$
Paramètres identifiés	$3,4\ 10^6$	$-9,6\ 10^9$	$1,4\ 10^{13}$	$1,6\ 10^2$	$-9,9\ 10^{-1}$	$8,4$
Facteurs d'importance	$2,7\ 10^2$	$1,3\ 10^2$	$2,5\ 10^1$	$4,7\ 10^{-1}$	$8,6\ 10^{-7}$	$4\ 10^{-6}$

TABLE 3.8 – Valeurs des coefficients α_{ij} et des facteurs d'importances s_θ estimés par la *Restoring Force Surface* lors d'une première identification sur base d'un modèle générique. On remarque la présence de raideurs non linéaires non négligeables et l'influence très légère de l'amortissement.

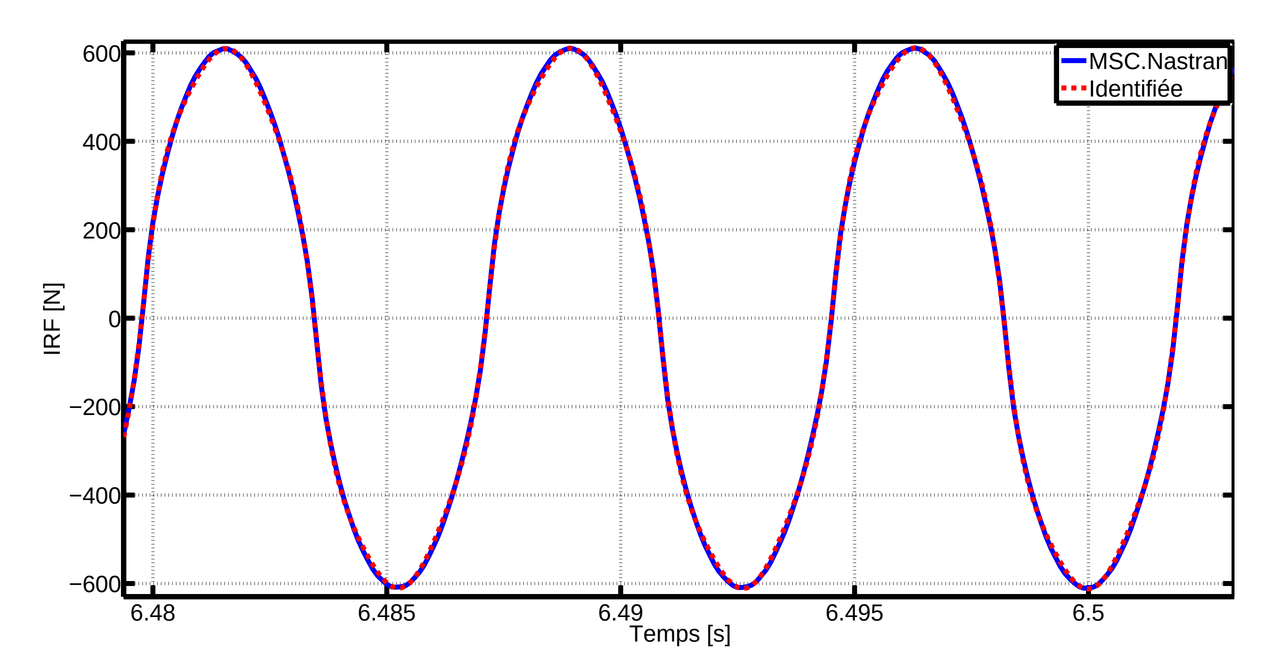


FIGURE 3.13 – Comparaison entre la force interne du système simulée par *MSC.Nastran* et celle identifiée durant cette première identification. La *Mean Square Error* commise est de 0,07%, ce qui témoigne d'une corrélation excellente.

3.6.3 Seconde identification

Cette seconde identification a pour but d'identifier les coefficients associées à un modèle mathématique plus physique que lors que la première identification, tout en conservant une correspondance inférieure à 1%.

L'estimation préliminaire du modèle mathématique et la première identification ont montré que l'amortissement présent est linéaire. Tandis que la raideur comporte une composante linéaire, à laquelle s'ajoute une raideur adoucissante non linéaire. Nous utiliserons donc un modèle mathématique de la forme :

$$\hat{\mathbf{f}} = \alpha\mathbf{q} + \beta\dot{\mathbf{q}} + \gamma\text{sign}(\mathbf{q})\,|\mathbf{q}|^{i}$$

où i est un exposant à identifier également sous les contraintes :

$$\begin{cases} \alpha > 0 \\ \beta > 0 \\ \gamma < 0 \quad \text{ssi} \quad i > 1 \\ \gamma > 0 \quad \text{ssi} \quad i < 1 \end{cases}$$

En effectuant l'identification de ces paramètres pour différentes valeurs de l'exposant i, nous pourrons déterminer l'exposant permettant de minimiser l'erreur *MSE* commise tout en satisfaisant les contraintes que nous nous sommes fixées. Nous ferons varier i de 0,01 à 3,5 avec un pas de 0,01. Au-delà, la matrice **A**, représentant le modèle mathématique, utilisée pour durant l'identification exhibe des problèmes numériques de déficience de rang, ce qui conduit à des erreurs importantes. Rappelons, enfin, que le coefficient α avait été estimé, sur base de la courbe de raideur illustrée à la Figure 3.12, à 1 10^7 N/m.

Les Figures 3.14, 3.15 et 3.16 présentent les paramètres, respectivement, α, β et γ identifiés pour les différents exposants i. Nous constatons que, pour les exposants supérieurs à 1, les valeurs identifiées pour les paramètres satisfont les contraintes que nous nous sommes fixées. Pour un exposant i compris entre 0,706 et 1, par contre, nous voyons apparaitre une raideur linéaire négative, ce qui n'est pas un comportement admis. En-dessous de $i = 0,706$, le coefficient de raideur linéaire est à nouveau positif, comme le coefficient de raideur non linéaire. Le coefficient d'amortissement conserve, globalement, une valeur identique pour tous les exposants. L'évolution de la *Mean Square Error* calculée est, quant à elle, illustrée à la Figure 3.17 et montre que l'erreur minimale est commise pour $i = 0,78$, ce qui se trouve dans la zone non admise. Nous devrons, dès lors opter pour un autre modèle. Il est important de souligner que la pureté des signaux d'entrée permet d'obtenir une erreur commise sur la force interne toujours inférieure à 1%, soit une corrélation excellente. En pratique, ce ne sera, bien entendu, pas le cas car le bruit et les procédures d'intégration et de filtrages perturberont les signaux.

De manière à identifier une raideur linéaire similaire à celle observée sur la courbe de raideur du système, nous sommes tentés de considérer un exposant de 1,085 pour la raideur non linéaire. Dans ces conditions, les coefficients, les facteurs d'importance, ainsi que l'erreur *MSE* prennent les valeurs présentées à la Table 3.9. L'erreur *MSE* commise reste très faible.

Comparaison avec le modèle éléments-finis

De manière à confirmer la loi de raideur identifiée, nous pouvons la comparer avec la loi de raideur tracée à la Figure 3.12, à partir de la simulation effectuée. Cette comparaison est présentée à la Figure 3.18. On remarque une très bonne correspondance entre les deux courbes même si elles ne sont pas parfaitement identiques. On constate une erreur relative maximale d'environ 15% pour de très petits déplacements – environ $0,2\ 10^{-5}$ m. Celle-ci s'explique par le fait que le nombre de points dans cette zone reste faible par rapport au reste de la courbe et le comportement est donc relativement mal perçu lors de l'identification. Ce problème pourrait être éviter considérant une excitation permettant de mieux couvrir

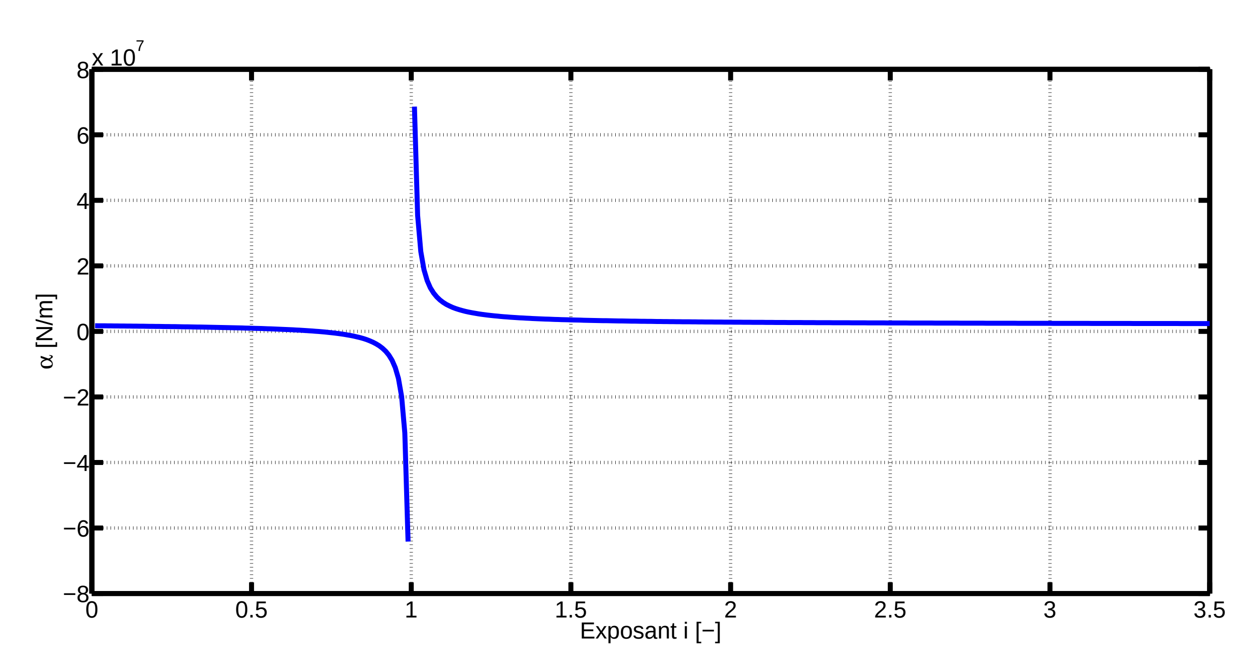


Figure 3.14 – Evolution de la valeur du coefficient de raideur linéaire identifié en fonction de l'exposant i de la composante non linéaire de la raideur.

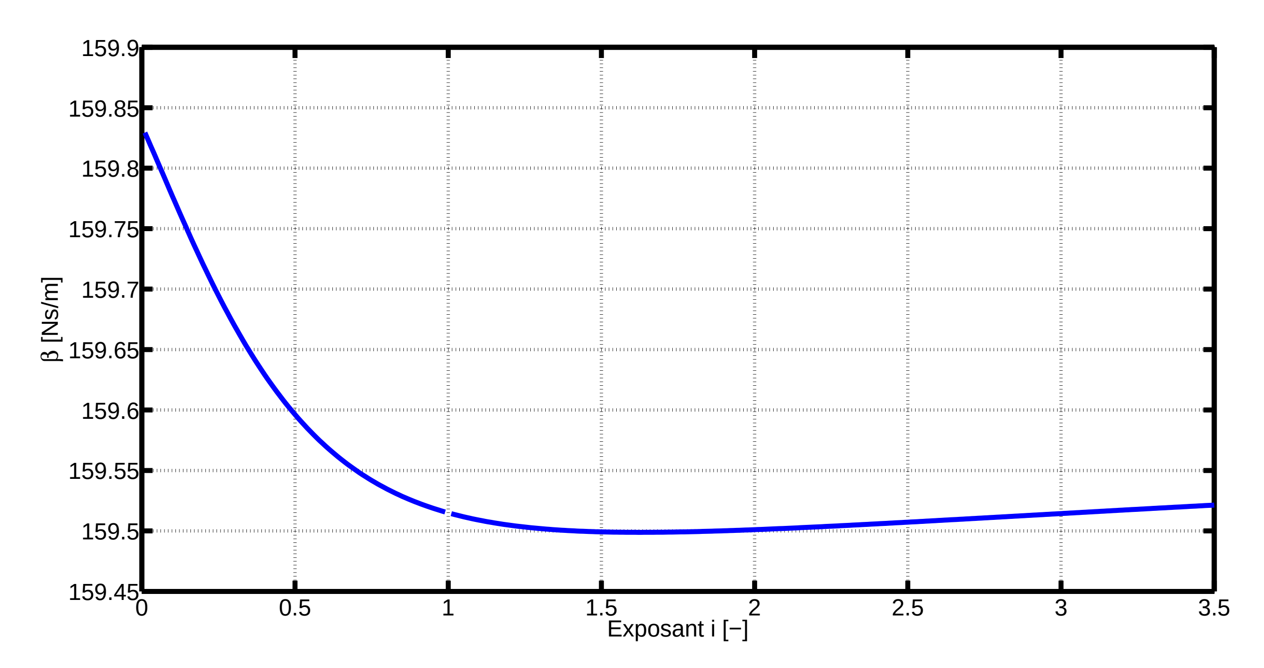
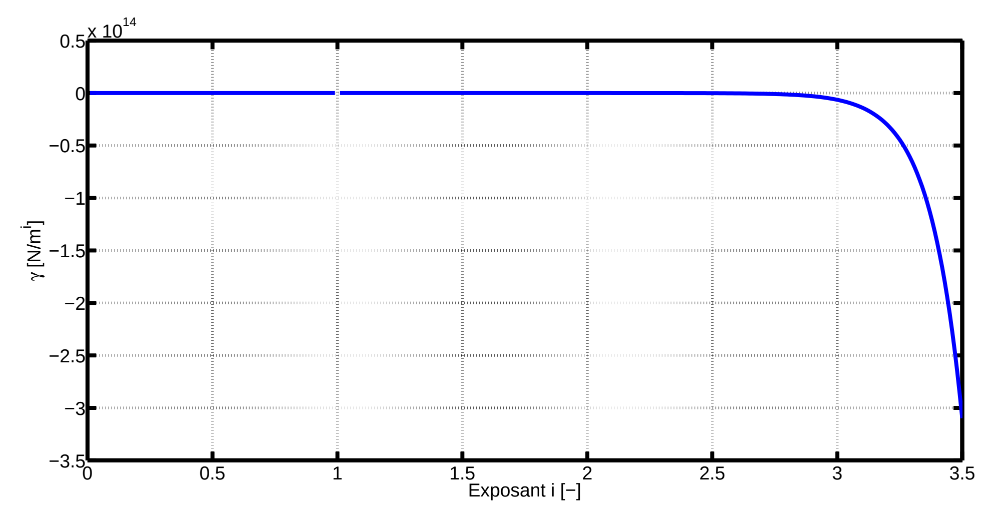
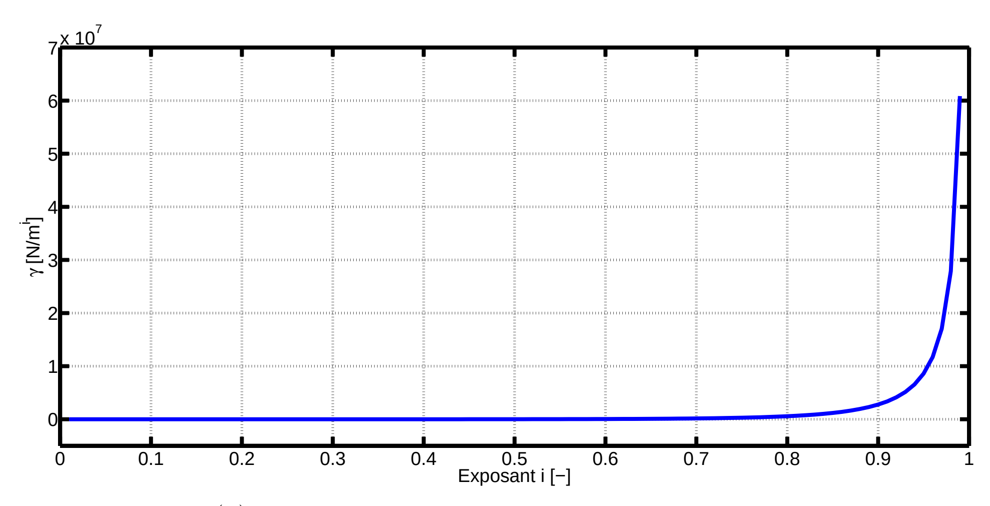


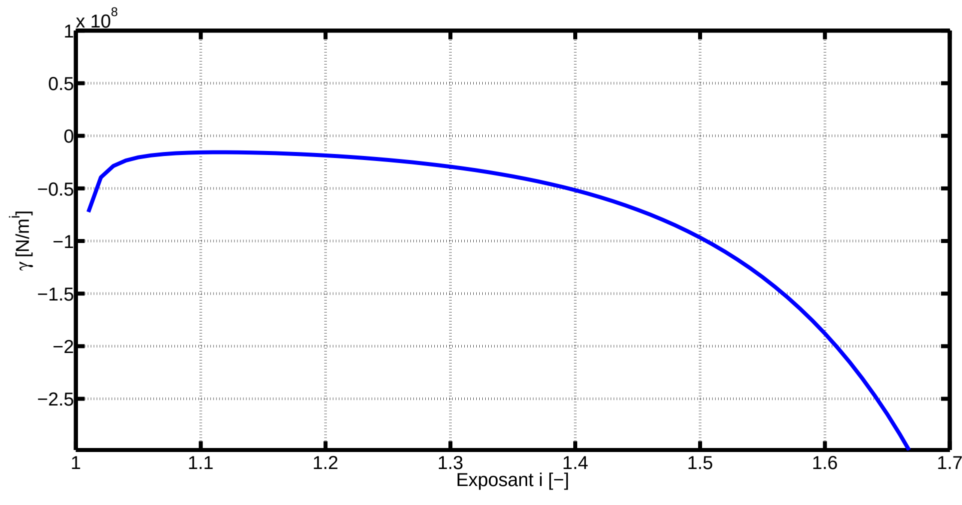
Figure 3.15 – Evolution de la valeur du coefficient d'amortissement linéaire identifié en fonction de l'exposant i de la composante non linéaire de la raideur.



(a) Evolution pour l'ensemble des exposants i.



(b) Zoom sur les exposants compris entre 0 et 1.



(c) Zoom sur les exposants compris entre 1 et 1,7.

FIGURE 3.16 – Evolution de la valeur du coefficient de raideur non linéaire identifié en fonction de l'exposant i de la composante non linéaire de la raideur.

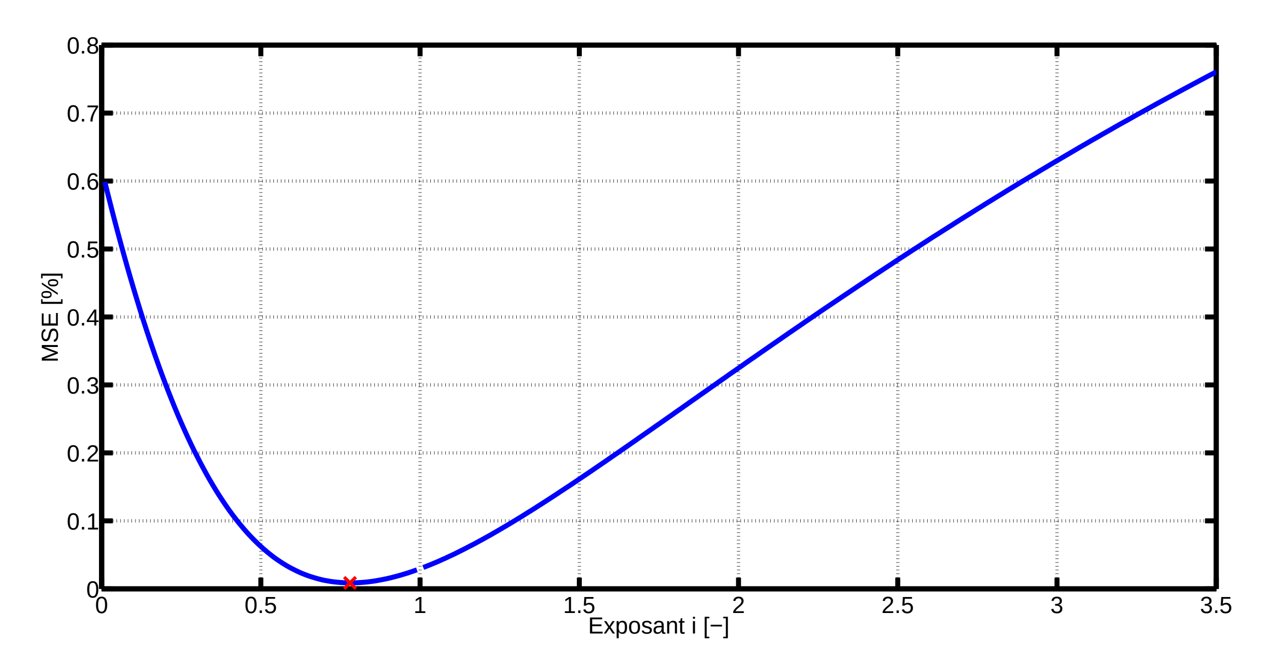


FIGURE 3.17 – Evolution de la *Mean Square Error* commise sur la force interne en fonction de l'exposant i de la composante non linéaire de la raideur.

	α $[N/m]$	β $[Ns/m]$	γ $[N/m^{1,085}]$
Paramètres identifiés	$1\ 10^7$	$1,6\ 10^2$	$-1,63\ 10^7$
Facteurs d'importance	$2,3\ 10^3$	$4,78\ 10^{-1}$	$1,5\ 10^3$
MSE [%]	0,046		

TABLE 3.9 – Valeurs des coefficients α, β et γ et des facteurs d'importances s_θ estimés par la *Restoring Force Surface* lors de la seconde identification pour un exposant associé à la raideur non linéaire pris à 1,085 comme l'encourageait les résultats précédents.

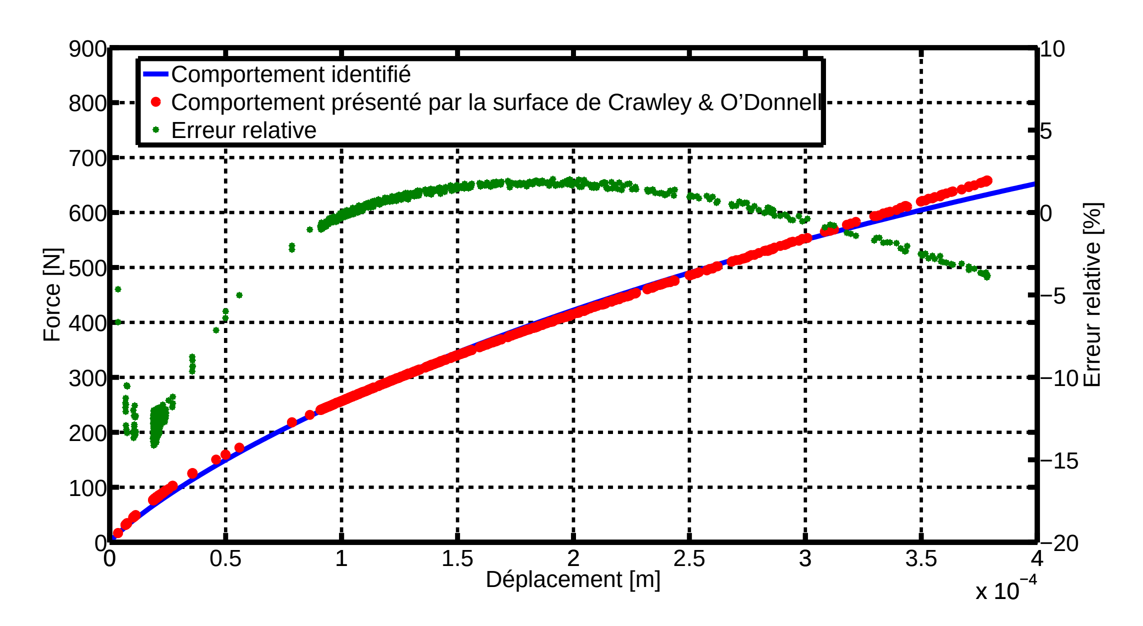


FIGURE 3.18 – Comparaison entre la courbe de raideur tracée à partir de la réponse à l'excitation CHIRP, calculée par *MSC.Nastran* et celle identifiée par la *Restoring Force Surface* en supposant un exposant associé à la raideur non linéaire égal à 1,085.

le comportement pour de faibles déplacements et de faibles vitesses. Ensuite, l'erreur tend à croitre à l'extrémité de la plage de déplacements balayée, pour les mêmes raisons. Ce phénomène montre que le modèle identifié ne sera utilisable que sur cet même intervalle de déplacements, les résultats calculés pour des déplacements plus importants seront erronés. Rappelons que la loi élastique non linéaire n'a pas été recalée au-delà de ces valeurs de déplacement. Simuler le système hors de cet intervalle n'aura donc pas beaucoup de sens. Avec une erreur inférieure à 5% sur une grande majorité de la courbe, ces résultats sont encourageant et témoignent de la capacité de la *Restoring Force Surface* à identifier une non linéarité de ce type.

Grâce à *MSC.Nastran*, il est possible d'obtenir directement la courbe de raideur de l'amortisseur modélisé. Celle-ci est calculée au moyen du module SOL 106 en appliquant une force progressive sur le noeud représentant le banc optique. La courbe obtenue, comparée à celle identifiée, est présentée à la Figure 3.19. Bien que l'allure générale soit similaire, on observe une différence relativement importante. L'erreur relative atteint un maximum de 22% pour les petits déplacements et est comprise entre 7,5 et 15% pour sur la majorité de la courbe. Cette erreur reste importante et ne témoigne donc pas d'une bonne identification.

Vu les difficultés éprouvées au Chapitre 1 pour simuler correctement un système non linéaire, nous n'écartons pas la possibilité d'une mauvaise simulation du système par le module d'intégration implicite, SOL 129, de *MSC.Nastran*. Pour confirmer ces résultats, il serait donc judicieux de pouvoir s'assurer que les simulations effectuées sont correctes, par exemple, en simulant le modèle avec un autre logiciel tel que *SAMCEF Mecano* qui a su se montrer précis dans le Chapitre 1. Cette réflexion est principalement motivée par l'écart, important également entre la loi de raideur déduite de la loi de *Crawley & O'Donnell* – et, donc, directement déduite de la réponse simulée – et la loi calculée par la SOL 106.

Néanmoins, pour connaitre la loi matériau élastique non linéaire $\sigma = f(\epsilon)$ implicitement identifiée par la *Restoring Force Surface*, nous pouvons modifier la loi recalée, introduite dans le modèle éléments-finis de manière à faire correspondre, au mieux, les courbes de raideur obtenues ci-dessous. Malheureusement, pour des raisons pratiques d'accès au logiciel *MSC.Nastran*, nous n'avons pu mener cette étape aussi loin que nous l'aurions souhaité. La Figure 3.20 présente et compare, avec le comportement identifié,

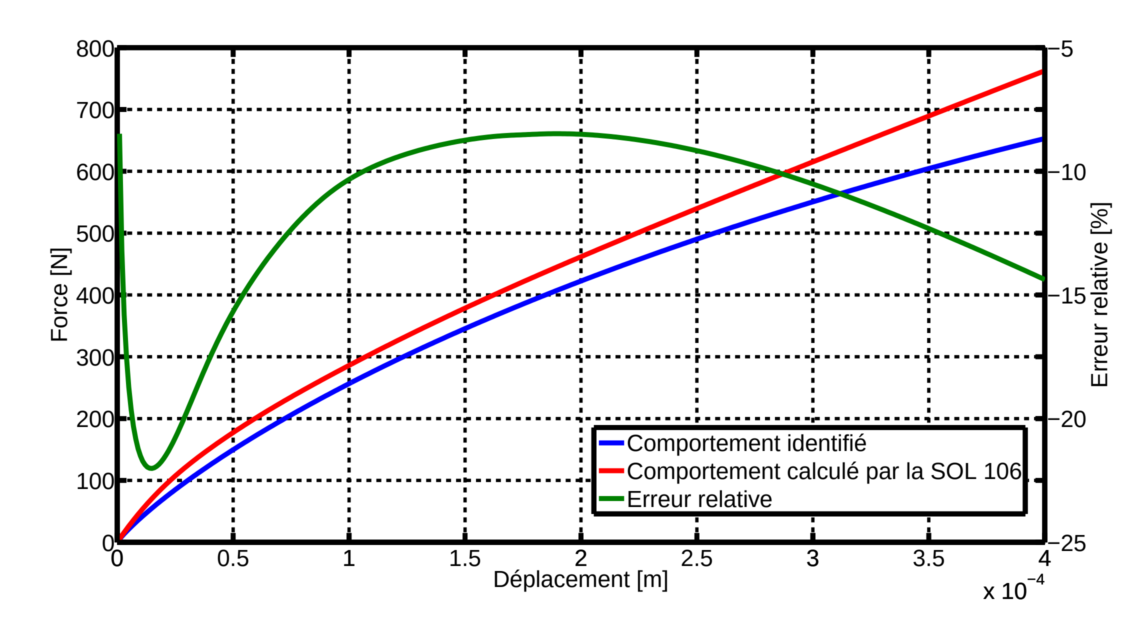


FIGURE 3.19 – Comparaison entre la courbe de raideur identifiée par la *Restoring Force Surface* en supposant un exposant associé à la raideur non linéaire égal à 1,085 et la courbe de raideur statique calculée par le module d'essais statiques non linéaire, SOL 106, de *MSC.Nastran*.

une courbe de raideur obtenue avec une nouvelle loi matériau. La diminution de l'erreur est significative et témoigne d'une bonne corrélation. La Figure 3.21 compare les lois matériaux. Globalement, la loi implicitement identifiée est moins rigide que la loi réellement présente dans le modèle. La Table 3.10 liste les fréquences de résonance obtenue avec celle "nouvelle" loi. Le comportement est, comme nous l'avons remarqué, trop souple et les fréquences trop faible. L'erreur commise sur les fréquences est de l'ordre de 10%. L'identification n'est donc pas optimale.

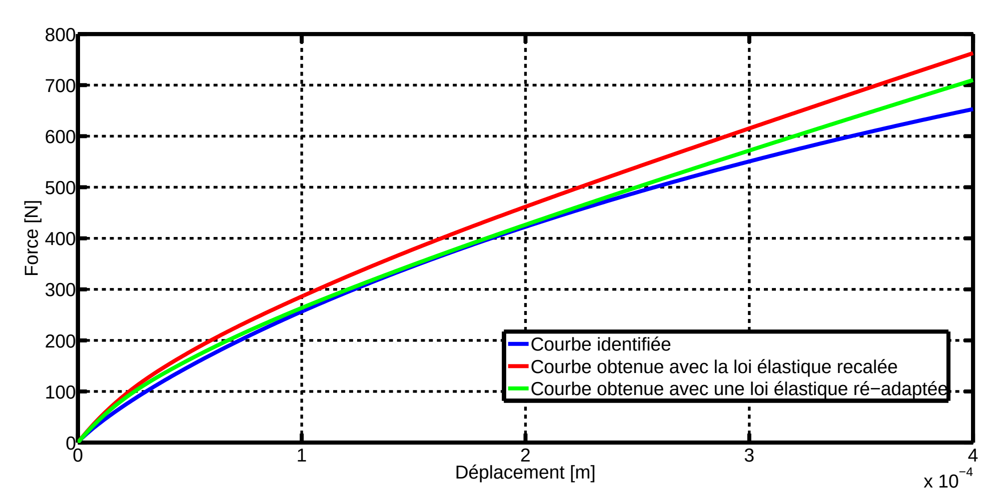
3.7 Conclusion

Tout au long de ce troisième et dernier chapitre, nous nous sommes engagés dans l'étude de la problématique soulignée au Chapitre 2.

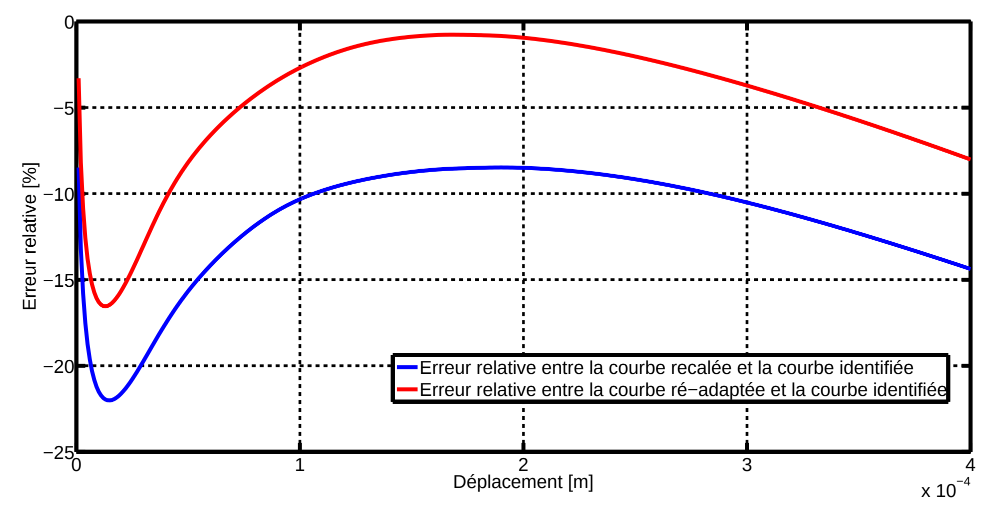
Dans un premier temps, nous avons pris soin de réaliser un modèle éléments-finis de l'amortisseur incluant des éléments élastiques non linéaire et dont les conditions aux limites devaient correspondre aux essais expérimentaux réalisés par le constructeur *GAMMA* lors de la conception et la validation de l'amortisseur. Le modèle initialement réalisé par la société *Mecano ID* a donc été complété et validé sur base des tests de recette établis par le *C.N.E.S.*.

Une fois le modèle éléments-finis prêt, la seconde étape fut de déterminer les propriétés de la couche d'élastomère insérée et, en particulier, de recaler sa loi élastique non linéaire sur base des résultats expérimentaux. Malheureusement, nos connaissances sur l'élastomère utilisé étant très minces, de nombreuses hypothèses ont du être réalisées concernant sa masse volumique, son amortissement et son coefficient de Poisson. La connaissance de ces paramètres affecte bien entendu l'ensemble de la réponse du système étudié et, pour une future étude, nous conseillons vivement de pouvoir les estimer plus précisément.

Le recalage de la loi élastique fut, quant à lui, réalisé au moyen d'une procédure simple de prédiction/correction. La loi fut ainsi construire point par point de manière à correspondre, au mieux, aux données expérimentales qui se résumaient aux fréquences de résonance mesurées pour différents niveaux d'excitation aléatoire. Nous avons pu présenter une loi permettant d'atteindre à moins de 3% près ces fréquences.



(a) Comparaison entre la courbe de raideur identifiée et les courbes d'essais statiques obtenues, d'abord, avec la loi élastique initiale recalée, ensuite, avec une loi ré-adaptée pour faire correspondre les comportements observés.



(b) Erreurs entre la courbe de raideurs identifiées et celles obtenues avec la SOL 106 pour les deux lois élastiques.

FIGURE 3.20 – Détermination de la loi élastique non linéaire implicitement représentée par le système identifié.

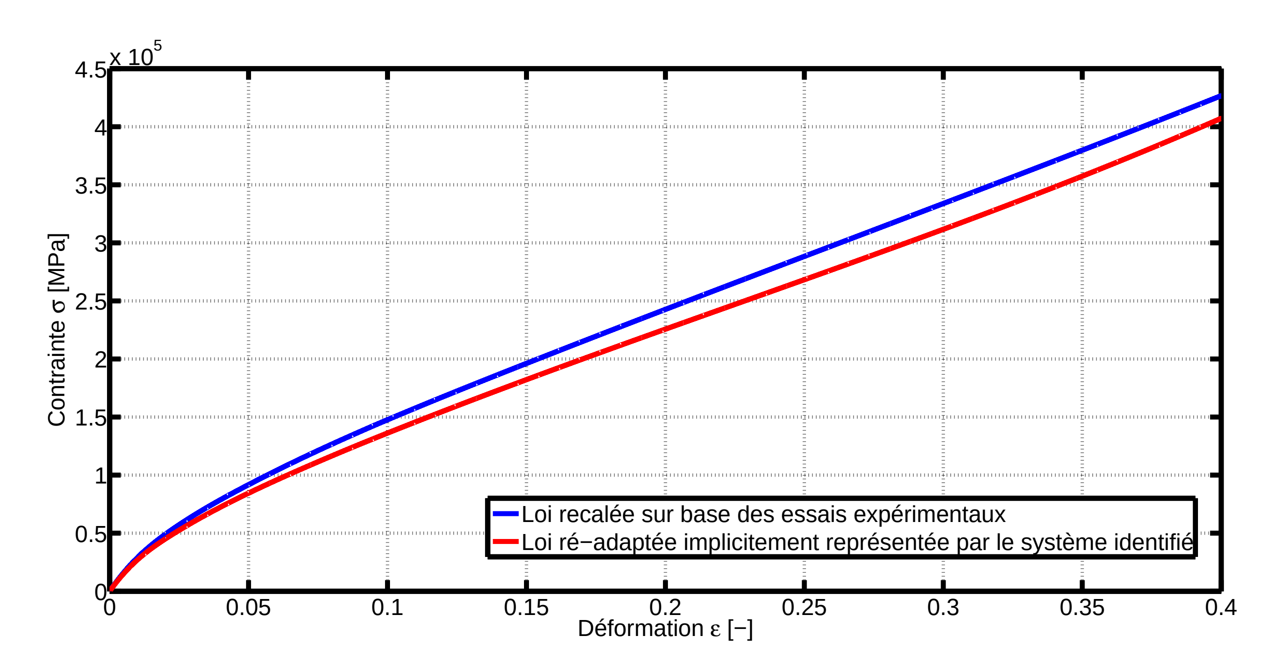


FIGURE 3.21 – Comparaison entre entre la loi matériau élastique non linéaire recalée au début de ce chapitre et la loi implicitement représentée par le système identifié.

Niveau	**Fréquences expérimentales** [Hz]	**Fréquences calculées** [Hz]	**Erreur relative** [%]
Très bas ("RFR")	211	199,59	5,4
-12 dB	176	166,02	4,6
-9 dB	166	153,81	7,3
-6 dB	156	141,13	9,53
-3 dB	146	129,39	11,37
0 dB	140	123,29	11,94

TABLE 3.10 – Comparaison entre les fréquences identifiées de manière expérimentales et celles calculées numériquement pour la loi élastique implicitement représentée par le système identifié. Les erreurs relatives commises sont relativement importantes.

L'étape suivante consistait à effectuer les simulations préliminaires à l'identification du système. Nous avons discuté le signal d'excitation choisi.

Ensuite, nous avons pu appliquer la méthode de la *Restoring Force Surface* sur les données découlant des simulations. L'étape critique de cette procédure survient lors de la supposition d'un modèle mathématique, sur base duquel l'identification des paramètres sera réalisée. De manière à choisir au mieux ce modèle, nous avons procédé en deux étapes. Tout d'abord, la surface de *Crawley & O'Donnell* a été tracée et des observations ont pu être faites. En particulier, nous avons remarqué un comportement linéaire en fonction de la vitesse et non linéaire en fonction du déplacement. Nous avons également pu estimer la raideur linéaire présente dans le système.

La seconde étape consistait à effectuer une identification préliminaire, au moyen d'un modèle "générique", et d'observer les facteurs d'importances, mais aussi, les valeurs des coefficients identifiés pour prédire un modèle mathématique plus cohérent. L'identification a, en effet, été réalisée dans l'optique de déterminer une loi de comportement physique. Notons qu'un autre objectif est d'identifier un modèle de manière à prédire, de la manière la plus précise possible, le comportement utilisé pour l'identification. Cependant, cela peut mener à l'obtention de coefficients non physiques tels que des raideurs linéaires négatives, qui ne permettront pas de prédire d'autres comportements. C'est pourquoi ce but n'est généralement pas poursuivi.

Ces deux étapes ont permis d'établir un modèle mathématique cohérent et d'énoncer des conditions quant aux coefficients identifiés. L'exposant non linéaire a alors pu être optimisé pour satisfaire ses conditions, tout en menant à une *Mean Square Error* commise la plus faible possible. Notons toutefois que les erreurs rencontrées étaient toutes très faibles et, tous les modèles mathématiques conduisaient à une très bonne corrélation avec les signaux d'entrée. Cela peut s'expliquer par le fait que ces signaux sont tous très purs. En effet, ils découlent, tous, directement des simulations et sont, dès lors, dénudés de bruit ou d'erreurs dues à, par exemple, une procédure d'intégration.

Enfin, le modèle identifié a pu être comparé, d'abord, avec les signaux d'entrée et, en particulier, la courbe de raideur qu'il était possible d'en extraire. Cette première comparaison s'est révélée assez prometteuse. En effet, l'erreur commise sur la courbe de raideur était, globalement inférieure à 5%.

MSC.Nastran offrant, avec son module SOL 106, la possibilité de réaliser des chargements statiques, la courbe de raideur identifiée a, ensuite, pu être comparée avec la courbe obtenue avec ce module. Dans ce cas, des erreurs relativement importantes sont apparues. Néanmoins, vu les difficultés rencontrées au Chapitre 1, nous suspectons des problèmes de simulations, qui ont conduit à l'identification d'une loi erronée.

Nous avons, enfin, ré-adapté la loi matériau élastique non linéaire pour estimer la loi implicitement identifiée par la méthode de la *Restoring Force Surface*. Celle-ci est globalement trop souple et mènent à des fréquences de résonance entre 5 et 10% trop peu élevées.

En conclusion, il est difficile d'estimer si la méthode d'identification utilisée a rempli ou failli à son rôle. En effet, notre confiance mitigée en l'algorithme d'intégration implicite proposé par *MSC.Nastran* nous fait douter des observations réalisées. Celles-ci découlent-elles d'erreurs dues à la SOL 129 ou de la méthode en elles-mêmes ? Si nous n'avions aucune information sur la loi élastique non linéaire réellement présente dans le système et si l'excitation CHIRP était le seul signal disponible, nous pourrions conclure que la méthode à effectivement identifié le système avec une précision acceptable. Cependant, lorsque l'on compare les courbes de raideur obtenues avec celle calculée au moyen du modules de chargements statiques de *MSC.Nastran*, SOL 106, des erreurs relativement importantes apparaissent et la capacité de la méthode est mise à mal. L'idéal serait donc de pouvoir s'assurer que les données temporelles utilisées pour l'identification sont bien correctes.

Conclusion

Depuis plusieurs années, en raison de la recherche, toujours plus poussée, de performances, l'industrie est de plus en plus confrontée à des structures présentant un comportement non linéaire. Ce dernier étaient, dans de nombreux cas, négligés ou éviter, permettant ainsi de se limiter à la réalisation de modèles linéaires. Cependant, comme ce fut le cas pour la Source Laser de *PHARAO*, il peut arriver que les essais expérimentaux réalisés mettent en exergue un comportement non linéaire important, remettant en cause la validité des modèles linéaires.

Pour palier à ce problème, *Centre National d'Etudes Spatiales*, en partenariat avec, notamment *EADS-Astrium*, mènent des études au visant à valider les capacités d'intégration et de prise en compte des non linéarités. Par exemple, l'étude *DyNoLi* a tâché de prendre en compte des non linéarités de plusieurs types dans des modèles relativement simples. Cette étude a conduit à la formulation d'une série de recommandations, conseils et observations quant à la simulation temporelle de systèmes non linéaires au moyen du logiciel *MSC.Nastran*. En outre, des comparatifs des différents logiciels de calcul éléments-finis ont pu être dressés.

Ce travail se positionne dans la continuité de ces études. Un cas concret et réel a pu être traité, celui du banc optique de la Source Laser du module *PHARAO*. L'objectif était de mettre à l'épreuve la capacité ou non de la méthode d'identification *Restoring Force Surface*, présentant les avantages d'être simple, précise et robuste, quant à l'identification d'un comportement non linéaire. Ce dernier était du aux couches d'élastomères présentes dans les amortisseurs supportant le banc. Comme l'on montré de nombreuses études, les élastomères présentent un comportement particulièrement complexe dépendant de nombreux facteurs. Nous nous sommes limités ici à la considération d'une loi élastique non linéaire. Cependant, il est important de garder à l'esprit que ce comportement dépend également de la température, un facteur important dans le domaine spatial.

Le premier chapitre de ce travail consistait en une, à priori, simple prise en main du logiciel utilisé au sein du *C.N.E.S.*, *MSC.Nastran*. De manière à nous familiariser, mais aussi de familiariser le lecteur intéressé avec le module d'intégration temporelle adapté aux systèmes non linéaires, nous avons pris le temps de détailler les algorithmes et les commandes utilisées. Deux cas d'applications très simples ont été traités, le premier à un seul degré de liberté, le second à plusieurs degrés de liberté et les résultats comparés avec ceux obtenus au moyen d'autres logiciels tels que *SAMCEF Mecano* et un schéma d'intégration directe de Newmark codé sous *MATLAB*. Cette première étape a permis d'attester des conclusions déjà tirées dans de précédentes études du projet *DyNoLi*, à savoir la présence d'erreurs importantes dans *MSC.Nastran*, même pour des cas simples. Des paramètres d'intégration conduisant à des réponses correctes ont pu être mis en évidence, néanmoins, sans garantie. Le service technique de la société *MSC*, qui développe *MSC.Nastran* n'a pas pu, non plus, nous donner de réponse claire , précise et systématique quant aux problèmes soulevés. Le nouveau module d'intégration proposé par *MSC*, la SOL 400, nous a semblé donner des résultats cohérents. Nous soulignons l'importance d'avoir accès à un logiciel fiable.

Le second chapitre s'est attarder sur la description du problème traité. Nous y avons présenté le projet *PHARAO* et, en particulier, ses composants. Les résultats des essais expérimentaux ont été détaillés et la stratégie de résolution développée. Enfin, nous avons décrit en détails et en tâchant de donner un maximum de références bibliographiques au lecteur intéressé la méthode de la *Restoring Force Surface*,

méthode d'identification appliquée ici. De nombreuses remarques, conseils et solutions à des problèmes régulièrement rencontrés ont été soulignés.

Le troisième et dernier chapitre a traité le problème d'un amortisseur considéré seul, tel qu'il a été testé par le concepteur *GAMMA* lors de la qualification. Nous avons, dans un premier temps, complété et adapté le modèle éléments-finis représentant l'amortisseur. Nos connaissances très limitées sur l'élastomère utilisé nous a forcé à formuler de nombreuses hypothèses quant à la masse volumique, son coefficient de Poisson et son coefficient d'amortissement. Ces paramètres influencent directement l'identification et il est donc préférable d'obtenir une estimation fiable de ceux-ci. L'idéal aurait été d'avoir la fiche technique du matériau ou, du moins, un échantillon de ce dernier. Sur base des conclusions tirées au Chapitre 1, les paramètres de calcul et d'intégration ont pu être définis.

La première étape importante consista à recaler la loi élastique non linéaire $\sigma = f(\epsilon)$ associée au matériau élastomère sur base des données obtenues grâce aux essais. Par une procédure, d'estimation/correction nous avons pu construire une loi élastique permettant de représenter à 3% près le comportement réel de l'amortisseur. La précision atteinte à cette étape nous semble suffisante et ne nécessite pas d'approfondissement conséquents.

Ensuite, en prenant en considération les conseils et remarques quant à la procédure d'identification, le système a été simulé pour une excitation CHIRP. Celle-ci mène, en effet, à une très bonne couverture de l'espace d'état $(q,\ \dot{q})$ et favorise une bonne identification du système. Sur base des réponses calculées, nous avons alors pu entamer la procédure d'identification à proprement parler. L'étape critique de la méthode de la *Restoring Force Surface* consiste en la construction d'un modèle mathématique cohérent et adapté sur base duquel le *fitting* sera effectué. Nous avons procédé en deux temps. D'abord, l'étude de la surface de *Crawley & O'Donnell* nous a permis de mettre en évidence un comportement non linéaire uniquement basé sur le déplacement. Ces observations ont été confirmée par la réalisation d'une première identification à partir d'un modèle générique. Fort de ces premières conclusions, nous avons alors réalisé une seconde identification et une étude des coefficients identifiés en fonction de l'exposant i de la composante non linéaire en le déplacement. Un modèle assez représentatif de la simulation CHIRP a ainsi été construit. L'erreur *MSE* commise sur la force interne du système témoignait d'une corrélation excellente entre le modèle identifié et les réponses calculées. De même, les lois de raideur déduite de ces deux séries de résultats correspondaient, en majorité, avec une erreur inférieure à 5%.

Cependant, la courbe de raideur calculée au moyen d'un essai de charge statique – SOL 106 dans *MSC.Nastran* – témoignait d'un comportement plus rigide. Les erreurs commises se sont alors élevés à environ 10%. Nous n'avons pu déterminer la source de ces différences. Cependant, de manière à s'assurer qu'elles ne découlent pas d'une simulation incorrecte du système non linéaire par la SOL 129. Nous conseillons de simuler le système au moyen d'autres logiciels.

L'étape suivante de ce travail est de procéder à la simulation et l'identification du système complet comportant quatre amortisseurs ainsi qu'un super-élément représentant le banc optique. Le modèle éléments-finis a déjà été réalisé, cependant, nous n'avons pas pu, pour des raisons de temps de simulations, mener cette étape à son terme.

D'autre part, il serait intéressant de se rapprocher le plus possible des conditions d'essais où les signaux temporels ne sont pas tous directement disponibles et où du bruit parasite les données. De plus, il peut être intéressant d'observer l'influence, dans le cas du système complet, de la position des points de mesure. En effet, il est préférable de positionner ses accéléromètres de part et d'autre de la non linéarité. Cependant, dans certains cas, c'est impossible et les accéléromètres seront plus ou moins éloignés de la non linéarité.

Bibliographie

[1] Centre National d'Etudes Spatiales. Site web dédié à la mission PHARAO. `http://smsc.cnes.fr/PHARAO/`.

[2] MSC.Software Corporation. *MSC.Nastran 2004 - Reference Manual*, 2003.

[3] MSC.Software Corporation. *MSC.Nastran 2012 - Dynamic Analysis User's Guide*, 2011.

[4] MSC.Software Corporation. *MSC.Nastran 2012.2 - Quick Reference Guide*, 2012.

[5] S. Duym e J. Schoukens. Design of Ecitation Signals for the Restoring Force Surface Method. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 9 : pp. 139–158, 1995.

[6] Section Mécanique EADS-Astrium. Etude R&T DyNoLi (Lots 3.1). Janvier 2007.

[7] EADS-Sodern. Essais de caractérisation de l'hystérésis dans les suspensions après sollicitations. Octobre 2007.

[8] EADS-Sodern. Description et plan d'essais de la MSTH-R Source Laser PHARAO. Juin 2008.

[9] EADS-Sodern. Rapport d'essais mécaniques et thermiques de la MSTH-R. Avril 2010.

[10] E. F. Crawley et A. C. Aubert. Identification of Nonlinear Strucrural Elements by Force-State Mapping. *AIAA Journal*, Vol. 24 : pp. 155–162, 1986.

[11] A. Cassano et A. Cardona. A Comparison between Three variable-step algorithms for the integration of the equations of motion in structural dynamics. *Journal of Latin American Research*, 1991.

[12] M. Géradin et D. Rixen. *Mechanical Vibrations : Theory and Applications to Structural Dynamics*. John Wiley & Sons, 1997.

[13] P. G. Bergan et E. Mollestad. An Automatic Time Stepping Algorithm for Dynamic Problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 49 : pp. 299–318, 1985.

[14] L. Fox et E. T. Goodwin. Some New Methods for the Numerical Integration of Ordinary Differential Equations. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. 45 : pp. 373–388, 1949.

[15] J. Chung et G. M. Hulbert. A Time Integration Algorithm for Structural Dynamics With Improved Numerical Dissipation : The Generalized-α Method. *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 60 (No. 2) : pp. 371–375, Juin 1993.

[16] K. Worden et G. R. Tomlinson. Developments in Force State Mapping for Nonlinear Systems. *Proceedings of the 6th International Modal Analysis Conference, Kissimmee, U.S.A.*, pages pp. 1471–1479, 1988.

[17] K. Worden et G. R. Tomlinson. Application of the Restoring Force Surface Method to Nonlinear Elements. *Proceedings of the 7th International Modal Analysis Conference, Las Vegas, U.S.A.*, 1989.

[18] K. Worden et G. R. Tomlinson. An Experimental Study of a Number of Nonlinear SDOF Systems Using the Restoring Force Surface Method. *Proceedings of the 9th International Modal Analysis Conference, Las Vegas, U.S.A.*, pages pp. 757–764, 1991.

[19] K. Worden et G. R. Tomlinson. *Nonlinearity in Structural Dynamics : Detection, Identification and Modelling*. Institure of Physics Publishing, 2001.

[20] M. A. Al-Hadid et J. R. Wright. Developments in the Force-State Mapping Technique for Non-Linear Systems and the Extension to the Location of Non-Linear Elements in a Lumped Parameter System. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 3 : pp. 269–290, 1989.

[21] M. A. Al-Hadid et J. R. Wright. Estimation of Mass and Modal Mass in the Identification of Non-Linear Single and Multi Degree of Freedom Systems Using the Force-State Mapping Approach. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 6 : pp. 383–401, 1992.

[22] E. F. Crawley et K. J. O'Donnel. Identification of Nonlinear System Parameters in Joints Using the Force-State Mapping Technique. *AIAA Paper 86-1013*, pages pp. 659–667, 1986.

[23] S. H. Lee et S. S. Hsieh. Expedient Implicit Integration with Adaptative Time Stepping Algorithm for Nonlinear Transient Analysis. *Int. J. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 81 (No. 22) : pp. 151–172, 1990.

[24] H. M. Hilber et T. J. R. Hughes et R. L. Taylor. Improved Numerical Dissipation for Time Integration Algorithms in Structural Dynamics. *Earthquakes Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 5 : pp. 283–292, 1977.

[25] S. F. Masri et T. K. Caughey. A Nonparametric Identification Technique for Nonlinear Dynamic Problems. *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 46 : pp. 433–447, 1979.

[26] J.-C. Golinval et K. Worden G. Kerschen. Theoretical and Experimental Identification of a Non-Linear Beam. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 244 (No. 4) : pp. 597–613, 2001.

[27] D. N. Herting. A General Purpose Nonlinear Transient Integration System. *Innovative Methods for Nonlinear Problems*, 1984. Edited by Liu, W. K., Belytschko, T. and Park, K. C., Pineridge Press.

[28] Mecano ID. PHARAO Laser Feed : Description of the Finite Element Model. Octobre 2009.

[29] S. H. Lee. *MSC.Nastran Handbook for Nonlinear Analysis*, 1992.

[30] N. M. Newmark. A Method of Computation for Structural Dynamics of ASCE. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, Vol. 85 (No. 3) : pp. 67–94, Juillet 1959.

[31] H. Sassi et T. K. Caughey S. F. Masri. A Nonparametric Identification of Nearly Arbitrary Nonlinear Systems. *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 49 : pp. 619–628, 1982.

[32] P. Saad. *Modélisation et identification du comportement non linéaire des cales en caoutchouc*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2003.

[33] Samtech. *Samcef v13.1 - User Manual*, 2012.

[34] Realix Technologies. Etude R&T DyNoLi (Lots 2.2). Juin 2005.

[35] B. H. Thacker, S. W. Doebling, F. M. Hemez, M. C. Anderson, and J. E. Pepin et E. A. Rodriguez. Concepts of Model Verification and Validation. Octobre 2004.

[36] M. Bossak et O. C. Zienkiewicz W. L. Wood. An Alpha Modification of Newmark's Method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 15 (No. 10) : pp. 1562–1566, Octobre 1980.

[37] K. Worden. Data Processing and Experiment Design for the Restoring Force Surface Method, Part I : Integration and Differentiation of Measured Time Data. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 4 : pp. 295–319, 1990.